Video 1

Sonlu Üretilen R-modüller (R Esas İdeal Bölgesi)

Note Title 7.05.2021

$I \leq R$, $I=(a)$, $R=\mathbb{Z}$, $R=\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}$ cisim.

__Uyarı:__ $\mathbb{Z}[x]$ esas ideal bölgesi değildir.
$I=(2,x)\neq(f)$, $f\in\mathbb{Z}[x]$.

M R-üzerinde sonlu üretilen bir modül olsun.
$M=\langle m_1, m_2, \dots, m_n\rangle$.

$$\varphi: R^n \longrightarrow M,\quad \varphi(e_i)=m_i,\quad i=1,\dots,n,\quad e_i=(0,\dots,\underset{\uparrow}{\overset{i.\text{ koor.}}{1}},\dots,0)$$

φ örten olduğu için $M=\mathrm{Im}\,\varphi\simeq R^n/\ker\varphi$

__Örnek:__ M $\mathbb{Z}$-modül, $M=\mathbb{Z}^2/\ker\varphi = ?$

$$\ker\varphi=\langle(5,2),(3,4)\rangle \longrightarrow \langle(1,0),(0,14)\rangle$$

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 3 & 4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 0 & -14\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}+1 & 0\\ 0 & +14\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=20-6=14=2\cdot 7 \Rightarrow M\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{14}$$

$$M\simeq\frac{\mathbb{Z}^2}{\langle(1,0),(0,14)\rangle}\simeq\frac{\langle\cancel{(1,0)},(0,1)\rangle}{\langle\cancel{(1,0)},(0,14)\rangle}\simeq\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}_{14}$$

Smith Normal Form:

R esas ideal bölgesi, $M=\langle m_1,\dots,m_n\rangle$ sonlu üretilen R-modül.

$\varphi: R^n\longrightarrow M$, $\varphi(e_i)=m_i$, $i=1,\dots,n$.

$M\simeq R^n/\ker\varphi$

$\ker\varphi \leq R^n$ alt modül.

$\ker\varphi = \langle f_i \mid i \in \Delta \rangle$ $\quad R = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$e_j = (0, \dots, 1, \dots 0)$

$$f_i = a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$

$a_{ji} \in R$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_n \end{array} \\ f_i & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Hem R^n'nin hem de $\ker\varphi = L$ üreteçlerin aşağıdaki işlemleri uygulayabiliriz:

1) $\lambda e_i + e_j \longleftrightarrow e_j$, $\lambda \in R$

$$\langle e_1, \dots, e_j, \dots, e_n \rangle = \langle e_1, \dots, \lambda e_i + e_j, \dots, e_n \rangle$$

2) $e_i \longleftrightarrow e_j$

3) $e_i \longleftrightarrow u \cdot e_i$, $u \in R$ birim eleman

$(U\mathbb{Z} = \{\pm 1\},\ U\mathbb{F}[x] = \mathbb{F})$

Yukarıdaki baz işlemleri matrisi nasıl etkiliyor?

$$f_i = a_{i1} e_1 + \dots + a_{ik} e_k + \dots + a_{i\ell} e_\ell + \dots + a_{in} e_n$$

$e_\ell \longleftrightarrow \lambda e_k + e_\ell$, $\lambda \in R$.

$$f_i = a_{i1} e_1 + \dots + (a_{ik} - \lambda a_{i\ell}) e_k + \dots + a_{i\ell} (\lambda e_k + e_\ell) + \dots + a_{in} e_n$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & & e_k & & e_l & & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ \\ f_i \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & & & \\ a_{i1} & & a_{ik} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 \cdots & e_k & \cdots & \lambda e_k + e_l & \cdots & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1k} - \lambda a_{1l} & a_{1l} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ik} - \lambda a_{il} & a_{il} & a_{in} \end{bmatrix} \end{array}$$

$e_l \leftrightarrow e_l + \lambda e_k \iff$ Matrisin k. sütununu k. sütun $-\lambda$ l. sütun ile değiştiriyoruz.

2) $e_k \leftrightarrow e_l \iff$ Matrisin k. ve l. sütunları yer değiştirir.

3) $u \cdot e_k \leftrightarrow e_k \iff$ Matrisin k. sütunu $1/u$ ile çarpılır.

1') $f_l \leftrightarrow f_l + \lambda f_k$

$L = \langle f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_l \ldots \rangle$

$= \langle f_1, \ldots, f_k, \ , f_l + \lambda f_k, \ldots \rangle$

$f_l = a_{l1} e_1 + \cdots + a_{ln} e_n$

$f_l + \lambda f_k = (a_{l1} + \lambda a_{k1}) e_1 + \cdots + (a_{ln} + \lambda a_{kn}) e_n$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & \cdots & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_k \\ f_l \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{l1} + \lambda a_{k1} & \cdots & a_{ln} + \lambda a_{kn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} f_k \\ f_l + \lambda f_k \end{matrix} \end{array}$$

$f_\ell \Leftrightarrow f_\ell + \lambda f_k \Leftrightarrow$ ℓ. satır ℓ. satır $+ \lambda k$. satır ile değiştiriliyor.

2') $f_k \Leftrightarrow f_\ell \Leftrightarrow$ k. ve ℓ. satırlar yer değiştirir.

3') $f_k \Leftrightarrow u f_k \Leftrightarrow$ k. satır u ile çarpılır.

Diyelim ki, R^n/L bölüm modülünü anlamak oluşturduğum matris şu olsun:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

R esas ideal bölgesi $\Rightarrow R$ UFD
R'nin her elemanı "tek" bir şekilde asal çarpanlara ayrılabilir.

$R = \mathbb{Z}$, $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, $R = F[x]$, $f = p_1^{r_1}(x) \cdots p_k^{r_k}(x)$
$p_i(x)$ indirgenemez polinomlar.

$o : R \to \mathbb{N}$, $o(r) = r$'nin asal çarpanlarının sayısı.

<u>Örnek</u>: $R = \mathbb{Z}$, $o(1) = 0$, $o(5) = 1$, $o(35) = 2$
$o(16) = 4$.

Video 2

$M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ R-modül

$\varphi : R^n \to M$, $\varphi(e_i) = m_i$, $L = \ker\varphi$

$M \simeq R^n / L$, $L = \langle f_j \mid j \in J \rangle$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_{11} \neq 0$

Eğer $a_{11} \mid a_{k1}$ bu durumda

$-\lambda_k$ 1. satır $+ k$ satır

$a_{k1} \to 0$ $\quad (a_{k1} = \lambda_k a_{11})$

Diyelim ki $a_{11} \nmid a_{21}$ ve $a_{21} \nmid a_{11}$, $c = (a_{11}, a_{21})$

$o(c) < o(a_{11})$, $o(c) < o(a_{21})$.

$c = (a_{11}, a_{21}) \Rightarrow \sigma a + \tau b = c$, $\sigma, \tau \in R$.

$\Rightarrow \sigma \frac{a}{c} + \tau \frac{b}{c} = 1$

$$\begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 & \cdots & 0 \\ -b/c & a/c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - \\ a_{21} & a_{22} & - & - \\ & * & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & * & * \\ 0 & * & * \\ & * & \end{bmatrix}$$

$e_1, e_2 \longleftrightarrow \underbrace{\sigma e_1 + \tau e_2}_{= e_1'}, \underbrace{-b/c\, e_1 + a/c\, e_2}_{= e_2'}$

$(e_1, e_2, \dots, e_n) \longleftrightarrow (e_1', e_2', e_3, \dots, e_n)$

Bu işlemi sonlu sayıda yaparak matrisimizi şu hale dönüştürebiliriz:

$$\begin{bmatrix} d & * & * & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Bu sefer $\{f_j \mid j\in J\}$ üreteç kümesine benzer işlemler yaparak (matrisi sağdan 2×2-lik tersi olan matrislerle çarparak) matrisimizi şu hale getirebiliriz:

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \\ * & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde devam ederek matris şu hale gelir:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & & * \end{bmatrix}$$

Şimdi aynı işlemleri kırmızı alt matrise yapacağız ve bu şekilde devam edeceğiz. En sonunda matrisimiz:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \vdots & & d_n \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Sonuç:</u> L en fazla n tane eleman tarafından üretilir.
Benzer işlemler yaparak $d_1, d_2, \ldots, d_n$ elemanlarının $d_1 \mid d_2,\ d_2 \mid d_3, \ldots, d_{n-1} \mid d_n$ koşullarını sağlamasını garanti edebiliriz.

$$R^n = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \supseteq \langle f_j \mid j\in J\rangle = L$$

$$\downarrow$$

$$R = \langle e_1', \ldots, e_n'\rangle \supseteq \langle f_1', \ldots, f_n'\rangle = L$$

$$f_i' = d_i e_i'.$$

Dolayısıyla, $M \simeq R^n/L = \dfrac{R(e_1')\oplus R(e_2')\oplus \cdots \oplus R(e_n')}{\underset{d_1e_1'}{\underset{\shortparallel}{R(f_1')}}\oplus \underset{d_2f_2'}{\underset{\shortparallel}{R(f_2')}}\oplus \cdots \oplus \underset{d_nf_n'}{\underset{\shortparallel}{R(f_n')}}}$

$$R(e)\big/_{R(de)} \simeq R\big/_{dR}$$

$$\Rightarrow M \simeq R\big/_{d_1R} \oplus \cdots \oplus R\big/_{d_nR}$$

<u>Uyarı</u>: R Öklid domain, $x, y \in R$, $y \neq 0$

$x = qy + r \qquad n : R \to \mathbb{N}$, $n(r) < n(y)$.

Bu durumda yukarıda uyguladığımız baz değiştirme işlemleri elementer satır/sütun işlemleri ile elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & - & & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{21} &= q a_{11} + \cancel{r} \\ n(r) &< n(a_{11}) \end{aligned}$$

$R = \mathbb{Z}$, $F[x]$ Öklit domain

M R-modül, $\varphi : R^n \to M$, $L = \ker\varphi$

$$M = R^n\big/_L \qquad \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \qquad d_i \mid d_{i+1}, \; i = 1, \ldots, n-1.$$

<u>Teorem</u>: $d_1, \ldots, d_n$ elemanları birim elemanlar ile çarpma dışında tek şekilde elde edilir. Bu elemanlara M modülünün değişmez çarpanları denir.

Video 3

Kanıt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} = D$$

Δ_1 = A matrisinin tüm 1×1'lik alt matrislerinin determinantlarının en büyük ortak böleni olsun.

$= D$ " " . . - . .

$= d_1$

Δ_2 = A matrisinin tüm 2×2'lik - - - .

$= D$ " " . . -

$= d_1 d_2$

Δ_k = A matrisinin tüm $k\times k$'lik . . .

$= D$ " " - -

$= d_1 d_2 \cdots d_k$

$\Delta_n = d_1 d_2 \cdots d_n$

$d_1 = \Delta_1, \quad d_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, d_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$

Örnekler: $R = \mathbb{Z}$ M R-modül $\Leftrightarrow$ M değişmeli grup

$$M \to \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \qquad d_i \in \mathbb{Z}$$

$M \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$

$d_i = 0 \quad \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 18 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow M \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}$$

Matrislerin Kanonik Formları

$\mathbb{F}$ - cisim, $V \simeq \mathbb{F}^n$, $T: V \to V$ doğrusal operatör

$R = \mathbb{F}[x]$ P.I.D., Öklid Halkası

V bir R modül olarak düşünebiliriz.

$$R \times V \longrightarrow V, \quad (p(x), v) \longmapsto p(x) \cdot v = p(T) v$$

Örnek $p(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $p(T) = 3T^2 - 5T + 4I$

$$p(T) \cdot v = 3T(T(v)) - 5T(v) + \underbrace{4I(v)}_{4v}$$

Bu durumda örten bir R-modül homomorfizmi var:

$$\varphi : R^n \longrightarrow V, \quad \varphi(e_i^R) = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$e_i = (0, \dots, \underset{i.\ \text{koor}}{1}, \dots, 0), \quad e_i^R = (0, \dots, \underset{i.\ \text{koor}}{1}, \dots, 0)$$

$e_i \in \mathbb{F}^n \simeq V$ $\qquad$ $e_i^R \in R^n$

$$V = \operatorname{Im}\varphi \simeq R^n / \ker\varphi$$

$$\varphi(p_1(x), \dots, p_n(x)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x) e_i^R\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \varphi(e_i^R)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(T)(e_i)$$

<u>Gözlem:</u> $Te_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\, e_j \quad \left(C = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \quad \mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \right)$

$(T - c_{11})e_1 - c_{21}e_2 - \cdots - c_{n1}e_n = 0$

$(x - c_{11}, -c_{21}, \dots, -c_{n1}) \in \ker \varphi.$

Benzer şekilde $XI - C = \begin{bmatrix} x - c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & x - c_{22} & & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & & x - c_{nn} \end{bmatrix}$

matrisinin sütunları $\ker\varphi$'nin içinde kalacak.

<u>Lemma:</u> $\ker\varphi$ alt modülü $XI - C$ matrisinin sütunlarının gerdiği alt $R \simeq F[x]$ modüle eşittir.

<u>Kanıt:</u> $R = F[X]$ UFD ($\Rightarrow$ PID) ve dolayısıyla $XI - C$ matrisinin Smith Normal Formu vardır.

$$XI - C \sim D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

$d_i \mid d_{i+1}$,
$i = 1, \dots, n-1.$

$U = XI - C$ matrisinin sütunlarının gerdiği alt R-modül olsun.

$\simeq D$ matrisinin sütunlarının gerdiği alt R-modül.

$$R^n/U \simeq R/d_1R \oplus \cdots \oplus R/d_nR$$

$d_1 d_2 \cdots d_n = \det D = u \cdot \det(XI - C)$, $u \in F \setminus \{0\}$.

$\deg(d_1 d_2 \cdots d_n) = \deg(\det(XI - C)) = n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \deg(d_i) = n$, $d_i = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

R/d_iR aynı zamanda bir F-modüldür, dolayısıyla bir F-vektör uzayıdır:

$R/d_iR \simeq \langle 1, x, \ldots, x^{k-1} \rangle_F$, $k = \deg d_i = \dim_F R/d_iR$

O halde, F-vektör uzayı olarak

$$R/U \simeq R/d_1R \oplus \cdots \oplus R/d_nR$$
$$\simeq F^{\deg(d_1)} \oplus \cdots \oplus F^{\deg(d_n)} \simeq F^n$$

$U \subseteq \ker \varphi \Rightarrow F^n \simeq R^n/U \xrightarrow{\phi} R^n/\ker\varphi \simeq V \simeq F^n$

Örten bir F-vektör uzayı homomorfizması. R^n/U ve $R^n/\ker\varphi$ vektör uzaylarının boyutları eşit olduğu için bu örten homomorfizma bir izomorfizma olmalıdır.

$(0) = \ker\phi = \frac{\ker\varphi}{U} \Rightarrow U = \ker\varphi$. ▬

Video 4

Sonuç: $V \simeq \mathbb{F}^n \simeq R^n/_{\ker\varphi} \overset{\bar\varphi}{\simeq} R^n/_{U} \simeq R/_{d_1R} \oplus \cdots \oplus R/_{d_nR}$

Bu izomorfizmalar hem R-modül hem de $\mathbb{F}$-vektör uzayı izomorfizmalarıdır.

$$V \simeq \mathbb{F}^n \simeq \mathbb{F}[x]/_{d_1\mathbb{F}[x]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[x]/_{d_n\mathbb{F}[x]}$$

$$\begin{array}{ccc} v & \longmapsto & [p(x)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(v) & \longmapsto & [x\,p(x)] \end{array}$$

Gözlemler: 1) Cayley-Hamilton Teoremi:

$f(x) = \det(xI - C)$: T operatörünün karakteristik polinomu olsun.

$f(x) = d_1(x)\, d_2(x) \cdots d_n(x)$

$$f(T)\cdot v \longmapsto [f(x)\cdot p(x)] = 0$$

$$\mathbb{F}[x]/_{d_1\mathbb{F}[x]} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[x]/_{d_n\mathbb{F}[x]}$$

$\Rightarrow f(T)(v) = 0, \ \forall v \in V.$

$\Rightarrow f(T) = 0.$ ■

2) $d_n(x)$ polinomu T operatörün minimal polinomudur.

3) $\mathbb{F}[x]/_{d_i(x)}$ $\qquad d_i(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$

$\{1, x, \ldots, x^{k-1}\}$ bu $\mathbb{F}$-vektör uzayının bir bazıdır.

$d_i(x) = 0 \Rightarrow x^k = -a_0 - a_1x - \cdots - a_{k-1}x^{k-1}$

$x \cdot 1 = x, \quad x \cdot x = x^2, \ldots, x \cdot x^{k-1} = x^k = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

T operatörünün Rasyonel Kanonik Formu

$$[T] = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

4) $d(x) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ $\quad p_i$ indirgenemez polinomlar

$$\mathbb{F}[x] / d\,\mathbb{F}[x] \simeq \mathbb{F}[x] / p_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[x] / p_k^{r_k}$$

5) $f(x)$ karakteristik polinomu doğrusal terimlerin çarpımı olsun.
Dolayısıyla, $d_i(x)$ polinomu da doğrusal terimlerin bir çarpımı olur.

$$d(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$$

$$\mathbb{F}[x] / d\,\mathbb{F}[x] \simeq \mathbb{F}[x] / (x-\lambda_1)^{r_1}\mathbb{F}[x] \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[x] / (x-\lambda_k)^{r_k}\mathbb{F}[x]$$

$\mathbb{F}[x] / (x-\lambda)^{r}\mathbb{F}[x]$ vektör uzayı için

$$\{ v_0 = 1, v_1 = x-\lambda, v_2 = (x-\lambda)^2, \ldots, v_{r-1} = (x-\lambda)^{r-1} \}.$$

$$x \cdot v_0 = x \cdot 1 = x = (x-\lambda) + \lambda = \lambda \cdot v_0 + 1 \cdot v_1$$

$$x \cdot v_1 = x(x-\lambda) = x^2 - \lambda x = (x-\lambda)^2 + \lambda x - \lambda^2$$

$$= \lambda(x-\lambda) + (x-\lambda)^2 = \lambda v_1 + v_2$$

$x \cdot v_{r-2} = \lambda v_{r-2} + v_{r-1}$

$x \cdot v_{r-1} = x(x-\lambda)^{r-1} = (x-\lambda)^r + \lambda(x-\lambda)^{r-1}$
$= \lambda v_{r-1} + 0.$

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{r \times r}$$

T operatörünün Jordan formu.

6) <u>Teorem</u>: T operatörünün köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart $d_n(x)$ minimal polinomunun farklı doğrusal terimlerin çarpımı olmasıdır.

<u>Kanıt</u>: Diyelim ki $d_n(x)$ minimal polinomu farklı doğrusal terimlerin çarpımı olsun.

$d_n(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ $\quad \lambda_i \neq \lambda_j$

$d_i(x) \mid d_n(x) \Rightarrow d_i(x)$ polinomları da bu farklı çarpanların bir kısmının çarpımı olacak.

$f(x) = \det(xI - C) = d_1(x) \cdot d_2(x) \cdots d_n(x)$
$= (x-\lambda_1)^{r_1} \cdot (x-\lambda_2)^{r_2} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$

$r_i \Leftrightarrow (x-\lambda_i)$ terimi tam olarak r_i tane $d_j(x)$ polinomunun çarpanıdır.

$r_3 = 4 \Leftrightarrow (x-\lambda_k)$, $d_n(x), d_{n-1}(x), d_{n-2}(x), d_{n-3}(x)$ terimlerini bölecek.

λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör alt uzayı

$\lambda_i I - C$ matrisinin belirttiği homogen denklem sisteminin çözüm kümesidir.

$$[\lambda_i I - C] = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} d_1(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda_i) \end{bmatrix} = 0$$

$d_j(\lambda_i)$ lerden tam olarak r_i tanesi sıfırdır. Dolayısıyla, λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör alt uzayı, W_i, r_i boyutludur.

$$n = \sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i \Rightarrow T \text{ operatörü}$$

köşegenleştirilebilir.

Ters yöndeki iddia da benzer şekilde kanıtlanabilir.

7) Eğer A ve B matrisleri benzer ve $B = P^{-1}AP$ ise $xI - B = P^{-1}(xI - A)P$ olur. Dolayısıyla, $xI - A$ ve $xI - B$ matrislerinin SNF'leri ve dolayısıyla değişmez çarpanları aynıdır.

Diğer yandan, $xI - A$ ile $xI - B$ matrislerinin SNF'leri aynı ise A ve B matrislerinin rasyonel formları aynıdır. Dolayısıyla, A ve B matrisleri benzerdir.