Grassmann Manifoldların Topolojisi ve Geometrisi

Eylül 2017 TMD Sempozyumu
Atılım Üniversitesi

0) Referanslar
1) Tarihçe
2) Tanım ve Gauss-Bonnet Teoremi'nin bir kanıtı (hücresel homoloji ve De Rham kohomolojisi)
3) Schubert hücreleri, Grassmann manifoldların homolojisi ve kohomolojisi
4) Young diyagramlarına ve Schubert Kalkülüs'e bir giriş
5) Grassmann manifoldlar üzerinde geometrik yapılar ve düşük boyutlu Grassmanların homoloji gruplarının doğal altmanifoldlar ile temsili.

Referanslar

1) Bredon, G.E., Topology and Geometry Springer-Verlag, GTM, 1995.

2) Casian, L, Kodama, Y., On the cohomology of Real Grassmannian manifolds, Arxiv:1309.5520v1

3) Coşkun, İ, Grassmannians: the first example of a moduli space. MIT OpenCourseWare available at http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-727Spring-2006

4) Fulton, W. : Young tableaux. London Math. Soc. Student Texts 35, Cambridge University Press (1997).

5) Hatcher, A. : Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2010. (Allen Hatcher sayfasından alınabilir.)

6) Ledoux Veerle, Malham Simon J.A., Introductory Schuber Calculus, 2010.

7) Ozan, Y, Türevlenebilir Manifoldlara Giriş, 2016 ODTÜ Yayınevi (ODTÜ Kitaplık)

8) Shi J., Zhou J., Characteristic Classes on Grassmannians, Turkish J. Math, (2014) 38 p. 492-523.

1) Tarihçe

- Hermann Grassmann (1809-1877) (Alman matematikçi)

Daha çok dil bilimci, fizikçi ve yayıncı olarak tanındı. Matematiğe katkıları 60'lı yaşlarına kadar ilgi çekmedi. Fizik ve dil bilimde kendi adıyla anılan teorileri vardır.
Lineer cebirdeki birçok kavramı ilk defa ortaya atan kişidir.

- Hermann Schubert (1848-1911) (Alman matematikçi)

Bugün Schubert Kalkülüs olarak bilinen matematiği ilk defa ortaya atan kişidir.

- Alfred Young (1873-1940) (İngiliz matematikçi)

Young tablolarını 1900 yılında Cambridge'de bir matematikçi olarak çalışırken ortaya atmıştır.

2) Tanım ve Gauss-Bonnet Teoremi

Manifold: $n \geq 0$ tamsayı olmak üzere n-boyutlu M manifoldu aşağıdaki koşulları sağlayan topolojik uzaydır:

i) M Hausdorff uzaydır,
ii) M sayılabilir bir tabana sahiptir (ikinci sayılabilir)
iii) M yerel olarak $\mathbb{R}^n$'e homeomorfiktir:

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \ , \quad U_\alpha \subseteq M \text{ açık},$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha, \quad V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \text{ açık},$$

homeomorfizmadır.
Ayrıca, eğer her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad C^\infty$$

ise $(M, \varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha, \alpha \in \Lambda)$ manifolduna türevlenebilir manifold denir.

Tanım (Grassmann Manifoldu)
$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismini göstersin. E $\mathbb{F}$-cismi üzerinde n-boyutlu bir vector uzayı ve k, $1 \leq k \leq n-1$ koşulunu sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda $G_{\mathbb{F}}(n,k)$ Grassmann manifoldu E vektör uzayının tüm k-boyutlu altuzaylarının kümesi olarak tanımlanır.

$$G_{\mathbb{C}}(n,k), \quad G_{\mathbb{R}}(n,k), \quad G^{+}_{\mathbb{R}}(n,k)$$

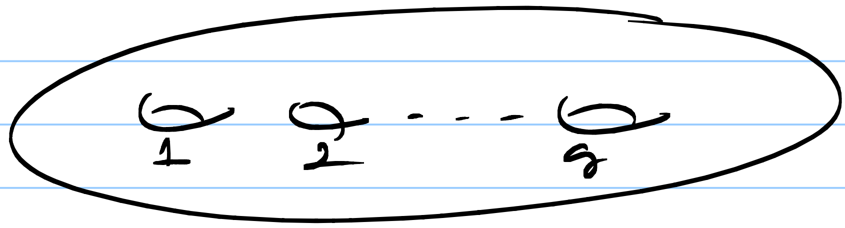
$G^+_{\mathbb{R}}(n,k)$ ise yönlendirilmiş k-boyutlu altuzayların kümesini göstermektedir.

<u>Örnekler:</u> $G^+_{\mathbb{R}}(n,1) = S^{n-1}$, $G_{\mathbb{R}}(n,1) = S^{n-1}/_{p\sim -p} = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$

<u>Gauss-Bonnet Teoremi</u>: $\Sigma_g \subseteq \mathbb{R}^3$ tıkız, bağlantılı ve sınırı olmayan (dolayısıyla yönlendirilebilir) türevlenebilir bir yüzey olsun. K yüzey üzerindeki Gauss eğriliğini göstermek üzere

$$\int_{\Sigma_g} K\,dS = 2\pi\,\chi(\Sigma_g) = 4\pi(1-g)$$

olur.



Σ_g

<u>Kanıtın ana hatları</u>: 1) $\Sigma = \Sigma_g \subseteq \mathbb{R}^3$ yerel olarak bir $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, fonksiyonunun grafiği olsun:

$$\Sigma = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}.$$

Bu durumda yüzey üzerindeki Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

ile verilir.

$$\Sigma$$
$$\cup\!|$$
$$\sigma : U \longrightarrow G^{+}_{\mathbb{R}}(3,1) = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$\sigma(x,y) = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$ Gauss gönderimi ve

$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \in \Omega^2(S^2)$ olmak üzere

$$\sigma^*(\omega) = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}\left(\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx \wedge dy\right)$$
$$= K\, dS \quad \text{olur.}$$

dS : yüzey üzerindeki alan formudur.

O halde, $\displaystyle\int_{\Sigma_g} K\, dS = \int_{\Sigma_g} \sigma^*(\omega)$ integralini

hesaplamalıyız. Bunun için Grassmann manifoldu $G^{+}_{\mathbb{R}}(3,1) = S^2$'nin De Rham kohomolojisini kullanacağız:

<u>De Rham Kohomolojisi</u>: M türevlenebilir manifold

De Rham Kompleksi: $\Omega^k(M)$ M üzerinde tanımlı türevlenebilir k-formların vektör uzayı olsun.

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \to \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M)$$
$$\to \cdots \to \Omega^n(M) \to 0$$

(eğer M'nin boyutu n ise)

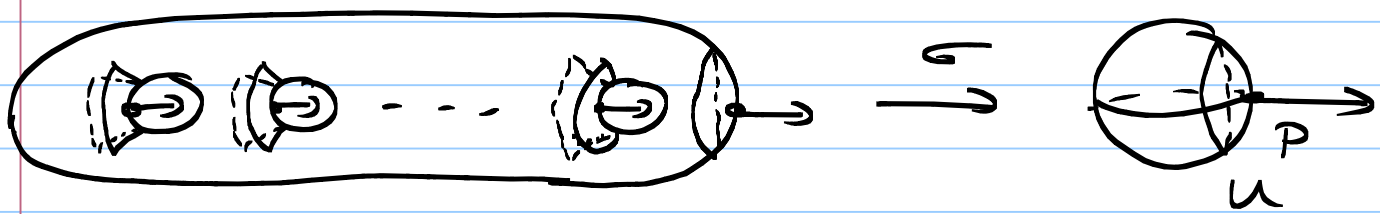
d : dış türev operatörü

$$H^k_{DR}(M) \doteq \frac{\ker\left(d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)\right)}{\mathrm{Im}\left(d:\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)\right)} = \frac{M \text{ üzerindeki kapalı } k\text{-formlar}}{M \text{ üzerindeki tam } k\text{-formlar}}$$

Ayrıca, eğer M n-boyutlu tıkız ve yönlendirilmiş bir manifold ise

$$H^n_{DR}(M) \xrightarrow{\int} \mathbb{R} \quad \text{bir doğrusal izomorfizmadır.}$$
$$[\omega] \longmapsto \int_M \omega$$

<u>Sonuç:</u> $H^2_{DR}(S^2) \xrightarrow[\cong]{\int} \mathbb{R}$



ω formunu küçük bir U açık kümesi üzerinde sıfırdan farklı olan ve $\int \nu = 4\pi$ koşulunu sağlayan ν 2-formu S^2 ile değiştirebiliriz.

$$\int_{S^2}\omega = 4\pi = \int_{S^2}\nu \Rightarrow [\omega]=[\nu] \Rightarrow [\omega-\nu]=0$$
$$\Rightarrow \omega-\nu = d\eta, \ \eta\in\Omega^1(S^2).$$

$$\int_{\Sigma_g}\sigma^*(\omega) = \int_{\Sigma_g}\sigma^*(\nu+d\eta) = \int_{\Sigma_g}\sigma^*\nu + \sigma^* d\eta = \int_{\Sigma_g}\sigma^*\nu + \int_{\Sigma_g} d\sigma^*\eta$$

Stokes' Teoremi

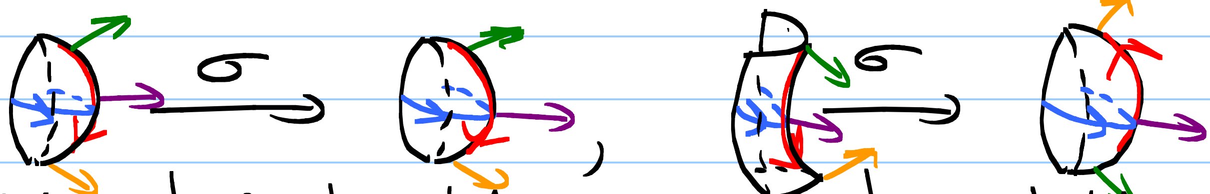
$$= \int_{\Sigma_g} \sigma^* \nu + \int_{\partial \Sigma_g = \emptyset} \sigma^* \eta = \int_{\Sigma_g} \sigma^* \nu$$

Şimdi de $\int_{\Sigma_g} \sigma^* \nu$ integralini hesaplayalım.

$$\int_{\Sigma_g} \sigma^* \nu = \int_{\bigcup_{i=1}^{g+1} V_i} \sigma^* \nu = \sum_{i=1}^{g+1} \int_{V_i} \sigma^* \nu$$

$$= \sum_{i=1}^{g+1} \operatorname{der}(\sigma : V_i \to U) \overbrace{\int_U \nu}^{4\pi}$$

$$= 4\pi (1-g)$$



V_1 der$=1$ U , V_i der$=-1$ U $i \neq 1$

Dolayısıyla, bu özel Σ_g yüzeyi için kanıt tamamlanmış oldu.

2) $\varphi : [0,1] \times \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R}^N$ türevlenebilir fonksiyon olsun öyle ki her $t \in [0,1]$ için

$$\varphi_t : \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad p \longmapsto \varphi_t(p) = \varphi(t,p),$$

görüntüsü bir daldırma ("immersion") olsun

$\longrightarrow \mathbb{R}^N$ ($N=7$ için bu mümkün!)

($\varphi_0 : \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^N$, $p \longmapsto p$ olmak üzere)

(Referans (8) sayfa 335.)

Stokes' Teoremi $\Rightarrow$

$$\int_{\Sigma_g\times\{1\}} \sigma_1^* \omega - \int_{\Sigma_g\times\{0\}} \sigma_0^* \omega = \int_{\partial(\Sigma_g\times[0,1])} \sigma^* \omega = \int_{\Sigma_g\times[0,1]} d\sigma^* \omega$$

$$= \int_{\Sigma_g\times[0,1]} \sigma^* \overbrace{d\omega}^{=0} = 0.$$

Fakat σ_t nedir?

$$\varphi_t : \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$\varphi_0 : \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_0(p) = \Sigma_g$ yüzeyinin p noktasındaki normali, ya da Σ_g'nin p noktasındaki teğet düzlemi $T_p\Sigma_g$.

Dolayısıyla,

$$\sigma_t : \Sigma_g \longrightarrow G^+_{\mathbb{R}}(N,2)$$
$$p \longmapsto T_{\varphi_t(p)}\varphi_t(\Sigma_g)$$

olarak tanımlayabiliriz.

Burada $G^+_{\mathbb{R}}(3,1) = G^+_{\mathbb{R}}(3,2) \hookrightarrow G^+_{\mathbb{R}}(N,2)$ bir alt manifolddur ve $S^2 = G^+_{\mathbb{R}}(3,1)$ üzerindeki ω formu $G^+_{\mathbb{R}}(N,2)$ manifoldu üzerinde de yaşamaktadır: $H^2_{DR}(G^+_{\mathbb{R}}(n,2)) \longrightarrow H^2_{DR}(S^2)$ örtendir.

Böylece kanıt tamamlanır. ∎

Hatırlatma: 1) Grassmann manifoldunun üzerindeki geometrik ve cebirsel topolojik yapılar etkili bir şekilde kullanılmıştır.

$G^+_{\mathbb{R}}(3,1) = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ üzerindeki standard alan formu ω için $\sigma^*\omega = K\,dS$ olur.

2) $G_{\mathbb{F}}(n,k)$ üzerindeki topoloji ve manifold yapısından henüz bahsetmedik! $G^+_{\mathbb{R}}(3,1) = S^2$ için S^2'nin manifold yapısını kullandık!

3) $G^+_{\mathbb{R}}(n,2) = \{(u,v) \mid u,v \in \mathbb{R}^n,\ \|u\| = \|v\| = 1,\ u \perp v\} / \sim$

$$(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2) \Leftrightarrow \begin{array}{l} u_2 = \cos\theta\, u_1 - \sin\theta\, v_1 \\ v_2 = \sin\theta\, u_1 + \cos\theta\, v_1 \end{array},\quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$= S^{n-1} \times S^{n-1} / \sim$$

Dolayısıyla, $G^+_{\mathbb{R}}(n,2)$ üzerindeki manifold yapısı bu şekilde görülebilir.

Ayrıca bu gösterim bize doğal bir gömme fonksiyonu verir.

$$G^+_{\mathbb{R}}(n,2) \longrightarrow G_{\mathbb{C}}(n,1) = \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$[(u,v)] \longmapsto [u + iv]$$

Bu fonksiyonun görüntüsü kuadratik bir hiperyüzeydir!

Grassmann Manifoldu Üzerinde Farklı Yapılar

1) Homogen Manifold olarak Grassmann

$$G_{\mathbb{R}}(n,k) = O(n) \big/ O(k) \times O(n-k) = G_{\mathbb{R}}(n,n-k)$$

$$O(k) \times O(n-k) \longrightarrow O(n), \quad (A,B) \longmapsto \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

$$G_{\mathbb{C}}(n,k) = U(n) \big/ U(k) \times U(n-k) = G_{\mathbb{C}}(n,n-k)$$

$O(n)$ ve $U(n)$ tıkız olduğu için Grassmann manifoldlar da tıkızdır.

Ayrıca, $\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}(n,k) = \dim O(n) - (\dim O(k) + \dim O(n-k))$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n} - k^2 + \cancel{k} - \cancel{n^2} - k^2 + 2nk + \cancel{n} - \cancel{k}}{2}$$

$$= nk - k^2$$

$$= k(n-k)$$

Benzer şekilde $\dim_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}}(n,k) = k(n-k)$ ve

$\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}(n,k) = 2k(n-k)$.

2) $G_{\mathbb{R}}(n,k) = \{ P : V \to V \mid \exists$ rankı k olan dik iz düşüm$\}$

$$= \{ A \in GL(n) \mid A^2 = A,\ A^T = A,\ \operatorname{rank} A = k \}.$$

Dolayısıyla, $G_{\mathbb{R}}(n,k)$ gerçel cebirsel bir varyetedir.

Hücresel Homoloji:

$X = X^0 \dot\cup X^1 \dot\cup \dots \dot\cup X^n \qquad X^i = \dot{\bigcup_\alpha} e^i_\alpha$ ayrık birleşim

$i_\alpha : e^i_\alpha \longrightarrow X^i$ karakteristik fonksiyon

$\varphi_\alpha = i_\alpha /_{\partial e^i_\alpha = S^{i-1}_\alpha} : S^{i-1}_\alpha \longrightarrow X^{i-1}$ yapıştırma fonksiyonu

$\varphi_{\alpha\beta} : S^{i-1}_\alpha \longrightarrow X^{i-1}/X^{i-2} = \bigvee_\beta S^{i-1}_\beta \longrightarrow S^{i-1}_\beta$

$d_{\alpha\beta} = \operatorname{der} \varphi_{\alpha\beta}$

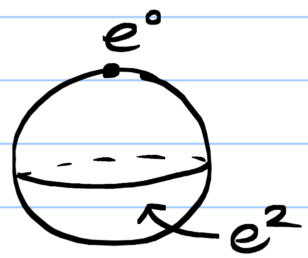
$C_i(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}(e^i_\alpha)$ serbest abelyen grup

$$\begin{aligned} \partial_i : C_i(X) &\longrightarrow C_{i-1}(X) \\ e^i_\alpha &\longmapsto \sum_\beta d_{\alpha\beta}\, e^{i-1}_\beta \end{aligned}$$

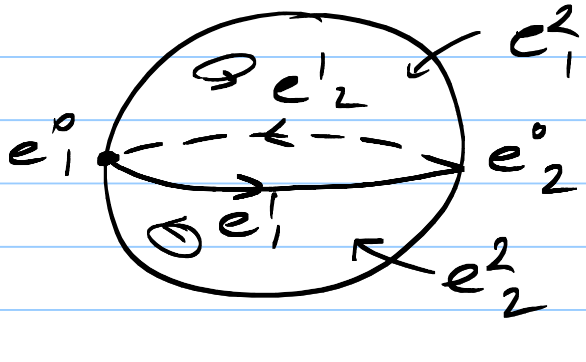
$$H_i(X;\mathbb{Z}) = \frac{\ker(\partial_i : C_i(X) \to C_{i-1}(X))}{\operatorname{Im}(\partial_{i+1} : C_{i+1}(X) \to C_i(X))}$$

Örnek: 1) $G^+_{\mathbb{R}}(3,1) = S^2 = e^0 \cup e^2$ veya

$= e^0_1 \cup e^0_2 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2_1 \cup e^2_2.$



veya



$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & 0 \\ & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$$e_1^2 \longmapsto e_1^1 + e_2^1$$
$$e_2^2 \longmapsto -e_1^1 - e_2^1$$
$$e_1^1 \longmapsto e_2^0 - e_1^0$$
$$e_2^1 \longmapsto e_1^0 - e_2^0$$

veya

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_2(S^2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & C_1(S^2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & C_0(S^2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & 0 \\ & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$H_2(S^2)=\mathbb{Z}$, $H_1(S^2)=0$, $H_0(S^2)=\mathbb{Z}$

"Poincaré Duality"

M n-boyutlu yönlendirilmiş tıkız bir türevlenebilir manifold olsun.

$$D : H_\ell(M) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H^{n-\ell}_{DR}(M)$$

$\alpha \in H_\ell(M)$ sınıfının bir $L^\ell \subseteq M$ alt manifoldu tarafından temsil edildiğini kabul edelim. Uygun bir koordinat seçimi ile $L \subseteq M$ ikilisi yerel olarak

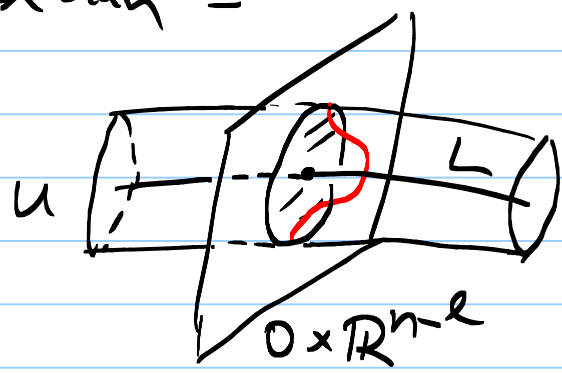
$$(L \cap U) \subseteq (M \cap U) \Rightarrow \mathbb{R}^\ell \times 0 \subseteq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} = \mathbb{R}^n$$

şeklinde görünür.

$$L \cap U = \{(x_1, \dots, x_\ell, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

$\rho : U \cong L \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to \mathbb{R}$ sıfır etrafındaki küçük bir kümenin dışında sıfır değeri alan ve integrali $\int_{0 \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \rho \, dx_{\ell+1} \wedge \dots \wedge dx_n = 1$ olan

$\rho = \rho(x_{\ell+1}, \dots, x_n)$ şeklinde bir fonksiyon olsun.

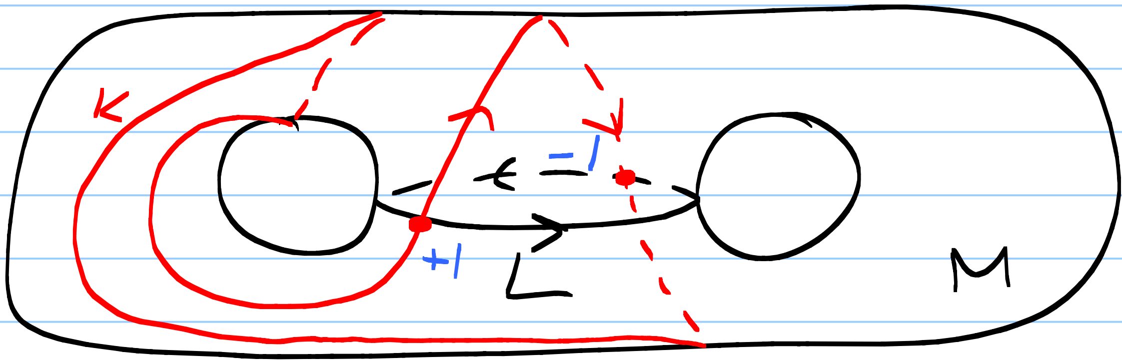


$\omega = \rho \, dx_{\ell+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ formu tüm L boyunca tanımlanabilir (bir Riemann metriği seçerek) ve kümlerin gereği kapalıdır:

$$\begin{aligned} d\omega &= d\rho \wedge (dx_{\ell+1} \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \sum_{i=\ell+1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{\ell+1} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

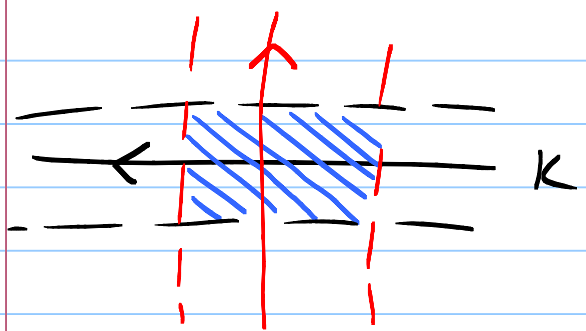
Bu formun temsil ettiği kohomoloji sınıfına $\alpha = [L]$ homoloji sınıfının Poincaré duali denir:

$$D(\alpha) = [\omega] \in H^{n-\ell}_{DR}(M).$$



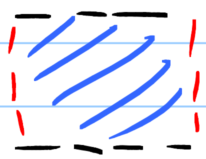
$$0 = \int_K D([L]) = \int_L D([K]) = \int_M D([L]) \wedge D([K])$$

$$K \cdot L = \int_K D([L]) = \int_L D([K]) = \int_M D([L]) \wedge D([K])$$



$$\int_M \rho_L \rho_K \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell \wedge dx_{\ell+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$= \int \rho_L \rho_K \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$



(Fubini Teoremi) $$= \left(\int_K \rho_L \, dx_{\ell+1} \wedge \cdots \wedge dx_n\right)\left(\int_L \rho_K \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell\right)$$

$$= (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1.$$

Grassmannlar üzerinde Koordinat Sistemi

$$G(n,k)=\{Y\in\mathbb{F}^{n\times k}\mid \operatorname{rank}Y=k\}\Big/_{Y\sim uY,\ u\in GL(k)}$$

$J=\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ çoklu endeks ise

$Y_{J^\circ}=\langle e_j \mid j\notin J\rangle$ $(n-k)$-boyutlu altuzay.

$$U_J=\{Y\in G(n,k) \mid Y\cap Y_{J^\circ}=\{0\}\}$$

Dolayısıyla, U_J sütunları $i_1,\dots,i_k$ olan altmatrisi nonsingüler olan matrislerden oluşur. Bu altmatrisi birim matrise dönüştürerek her bir $Y\in G_{\mathbb{F}}(n,k)$ için tek bir matris gösterimi bulabiliriz.

Örneğin, $J=\{1,2,\dots,k\}$ ise

$$U_J=\left\{Y=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&y_{1,k+1}&\cdots&y_{1,n}\\0&1&\cdots&0&y_{2,k+1}&\cdots&y_{2,n}\\\vdots&&&&\vdots&&\\0&\cdots&&1&y_{k,k+1}&\cdots&y_{k,n}\end{pmatrix}\ \Big|\ y_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$$

Dolayısıyla, $U_J\simeq\mathbb{F}^{k(n-k)}$ $Y\overset{\varphi_J}{\longmapsto}(y_{ij})$, bir koordinat sistemi verir.

<u>Örnek:</u> $G_{\mathbb{F}}(4,2)$, $Y=\begin{pmatrix}1&0&-1&4\\2&3&2&5\end{pmatrix}$, bu matrisin satır uzayı

$J=\{1,2\}$:

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}^{-1}Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&-3&12\\0&3&6&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1&4\\0&1&2&-1\end{pmatrix}$$

$J=\{1,3\}$:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}^{-1}Y=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\end{pmatrix}Y$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&3&0&13\\0&3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3/4&0&13/4\\0&3/4&1&-3/4\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^4\ni\begin{pmatrix}-1&4\\2&-1\end{pmatrix}\xmapsto{\ \varphi_{\{1,3\}}\circ\varphi_{\{1,2\}}^{-1}\ }\begin{pmatrix}3/4&13/4\\3/4&-3/4\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^4$$

$$G_{\mathbb{F}}(4,2) = U_{\{1,2\}} \cup U_{\{1,3\}} \cup U_{\{1,4\}} \cup U_{\{2,3\}} \cup U_{\{2,4\}} \cup U_{\{3,4\}}$$

Örnek $G_{\mathbb{R}}(n,1) = \mathbb{R}P^{n-1}$ veya $G_{\mathbb{C}}(n,1) = \mathbb{C}P^{n-1}$!

$$\begin{array}{ccc} & [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n] & \\ \swarrow \varphi_i & & \searrow \varphi_j \\ \left[\frac{x_1}{x_i} \; \frac{x_2}{x_i} \; \underset{1}{\underbrace{\frac{x_i}{x_i}}} \cdots \frac{x_n}{x_i}\right] & & \left[\frac{x_1}{x_j} \; \frac{x_2}{x_j} \cdots \underset{1}{\underbrace{\frac{x_j}{x_j}}} \cdots \frac{x_n}{x_j}\right] \\ \downarrow & \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} & \downarrow \end{array}$$

$$\mathbb{R}^{n-1} \ni \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

$$G^+_{\mathbb{R}}(n,1) = S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/_{p\sim -p} = G_{\mathbb{R}}(n,1)$$

($\mathbb{Z}_2$– örtü uzayı)

Aslında, $G^+_{\mathbb{R}}(n,k) \xrightarrow{2:1} G_{\mathbb{R}}(n,k)$ $\mathbb{Z}_2$–örtü uzayıdır

$$\{Y^+, Y^-\} \longrightarrow Y$$

Y^+ ve Y^- uzayları Y nin üzerindeki iki farklı yönlendirmeye sahip (yönlendirilmiş) vektör uzaylarıdır.

Plücker Gömmesi:

$$p: G_{\mathbb{F}}(n,k) \longrightarrow P(\Lambda^k \mathbb{C}^n) \text{ or } P(\Lambda^k \mathbb{F}^n)$$

$$Y = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_n\} \longmapsto y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_k$$

Örnek: $P: G_{\mathbb{F}}(4,2) \longrightarrow P(\Lambda^2 \mathbb{F}^4) = P(\mathbb{F}^6) = \mathbb{F}\mathbb{P}^5$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{bmatrix} \longmapsto [d_{12} : d_{13} : d_{14} : d_{23} : d_{24} : d_{34}]$$

$d_{12} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$, $d_{13} = x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21}$, $d_{14} = x_{11}x_{32} - x_{14}x_{21}$

Bu durumda $P(G_{\mathbb{F}}(4,2))$ $\mathbb{F}\mathbb{P}^5$ içinde kuadratik
$d_{12}d_{34} - d_{13}d_{24} + d_{23}d_{14} = 0$ hiperyüzeyi olur.

Dolayısıyla, $G_{\mathbb{F}}(n,k)$ bir cebirsel varyetedir.

$V \in G_{\mathbb{F}}(n,k)$ elemanını farklı iki taban için

$V = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ ve $V = \mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_k\}$

olarak yazarsak
$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k = \alpha\, f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{F}^*$ elemanı vardır.
Dolayısıyla, $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ ve $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$ vektörlerinin $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{F}^n)$ içindeki görüntüleri aynı olacaktır. Başka bir deyişle Plücker gömmesi iyi tanımlıdır.

3) Schubert Hücreleri ve Sınıfları

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ alacağız.

Bayrak Manifoldu (Flag manifold)

V n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. V için bir bayrak $F_* : F_1 \subset F_2 \subset \dots \subseteq F_n = V$, $\dim F_i = i$, $i=1,\dots,n$, şeklinde alt uzay dizisidir.

$e_i=(0,\dots,1,\dots,0)$, $F_i=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_i\}$, $i=1,\dots,n$, bayrağına standart bayrak denir.

$\mathbb{CP}^n = G_{\mathbb{C}}(n,1)$ için hücre yapısı

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^0$$

n parametre

$$\mathbb{C}^n = \{[z_0:z_1:\ \ :z_n] \mid z_0 \neq 0\} = [1\ \overbrace{*\ *\ \dots\ *}]$$

n-1 parametre

$$\mathbb{C}^{n-1} = \{[0:z_1:\dots:z_n] \mid z_1 \neq 0\} = [0\ 1\ \overbrace{*\ *\ \dots\ *}]$$

$\vdots$

1 parametre

$$\mathbb{C}^1 = \{[0:0:\ \ :0:z_{n-1}:z_n] \mid z_{n-1}\neq 0\} = [0\ 0\ \dots\ 0\ 1\ \overbrace{*}]$$

0 parametre

$$\mathbb{C}^0 = \{[0:\dots\ 0:z_n] \mid z_n \neq 0\} = [0\ 0\ \dots\ 0\ 1]$$

$\mathbb{C}^n$ (veya $\mathbb{R}^n$) için standart bayrağı seçelim. $J=\{J_1<J_2<\ <J_k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ toplu endeksi için $G_J(F_*)$ hücresi şu şekilde tanımlanır:

$$G_J(F_*) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & & & J_1 & & & J_2 & \cdots & J_i & \cdots J_k & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \vdots & & \\ * & * & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Buna denk bir tanım aşağıdaki gibidir:

$$G_J(F_*) \doteq \{Y \in G(n,k) \mid \dim(Y \cap F_{J_l}) = l,\ l=1,\dots,k\}.$$

$$a_\ell = J_\ell - \ell\,, \quad \dim C_J = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell$$

$$\lambda_\ell = n-k-a_\ell \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell = k(n-k) - \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell = k(n-k) - \dim C_J$$

Örnek: $G_{\mathbb{C}}(4,2)$

$C_{\{1,2\}}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0-boyutlu

$C_{\{1,3\}}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1-boyutlu

$C_{\{1,4\}}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 1 \end{pmatrix}$ 2-boyutlu

$C_{\{2,3\}}: \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2-boyutlu

$C_{\{2,4\}}: \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 \end{pmatrix}$ 3-boyutlu

$C_{\{3,4\}}: \begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4-boyutlu

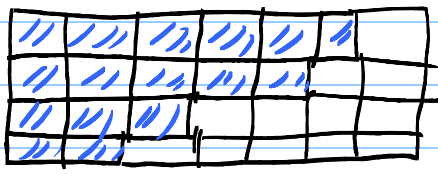
$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell}_{\text{kohomoloji}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell}_{\text{homoloji}} = k(n-k)$$

Örnek $n=11$, $k=4$, $J=\{2,4,7,9\}$

$n-k=7$ $\qquad \lambda=\{6,5,3,2\}$

$$C_J = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 4 \\ a_4 = 5 \end{matrix}$$

Young tablosu



7×4

C_J Schubert hücresinin kapanışına X_J Schubert varyeteri denir. Yukarıdaki örnek için

$$X_J = \overline{C_J} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buna denk bir tanım ise, F_* herhangi bir bayrak olmak üzere

$$X_J(F_*) \doteq \{ Y \in G(n,k) \mid \dim(Y \cap F_{j_\ell}) \geq \ell \}$$

olarak da verilebilir.

<u>Cebirsel bir alt varyete</u>: Sonlu tane minörün tanımladığı varyete olarak görülebilir!

$B_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ ile 11×4'lük $[x_{ij}]_{11\times 4}$ matrisinin j_1, j_2, j_3 ve j_4 üncü sütunlarına karşılık gelen minörün determinantını gösterirsek yukarıdaki X_J sınıfı aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$B_{j_1 j_2 j_3 10} = 0, \; B_{j_1 j_2 j_3 11} = 0, \; B_{j_1 j_2 8 9} = 0, \; \ldots$$

Schubert Hücreleri cinsinden

$$X_J = \bigcup_{a' \leq a} C_{J'}, \qquad J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \updownarrow a = \{j_1 - 1, j_2 - 2, \ldots, j_k - k\}$$

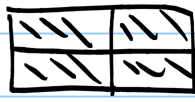
Veya

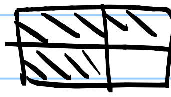
$$X_\lambda = \bigcup_{\lambda \leq \mu} C_\mu \qquad J \leftrightarrow \lambda = \{n-k-j_1+1, n-k-j_2+2, \ldots, n-j_k\}$$

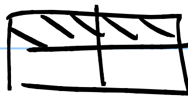
Schubert varyeteleri altmanifold olmasa da* bir homoloji (dolayısıyla bir kohomoloji) sınıfı belirler. Bu sınıfa Schubert sınıfı denir. Bu kohomoloji sınıfı σ_λ veya σ_a ile gösterilir.

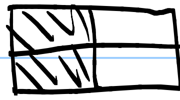
Hatırlatma: $GL(n,\mathbb{C})$ bağlantılı olduğu için bir Schubert varyetesini lineer bir dönüşüm ile ötelersek varyetenin belirlediği sınıf değişmez.

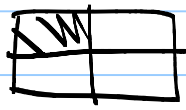
Örnek: $G_{\mathbb{C}}(4,2)$ — Boyut

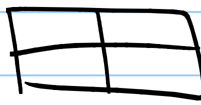
$x_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a=\{0,0\}$, $\lambda=\{2,2\}$  0

$x_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$ $a=\{0,1\}$, $\lambda=\{2,1\}$  1

$x_{\{1,4\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ $a=\{0,2\}$, $\lambda=\{2,0\}$  2

$x_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$ $a=\{1,1\}$, $\lambda=\{1,1\}$  2

$x_{\{2,4\}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ $a=\{1,2\}$, $\lambda=\{1,0\}$  3

$x_{\{3,4\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$ $a=\{2,2\}$, $\lambda=\{0\}$  4

$E_\bullet = \{E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq E_4\}$ standart bayrak olsun.

$\sigma_{1,0} = \sigma_1 = \{Y \in G_{\mathbb{C}}(4,2) \mid \dim(Y \cap E_2) \geq 1\}$

ve $\dim(Y \cap E_4) \geq 2 \leftarrow$ otomatik!

$\sigma_{1,1} = \{Y \mid Y \subseteq E_3\}$

$\sigma_2 = \{Y \mid E_1 \subseteq Y\}$ $\qquad \sigma_{2,1} = \{Y \mid E_1 \subseteq Y \subseteq E_3\}$

* Hironaka's Theorem of Resolution of singularities.

Hatırlatma Yukarıdaki hücre ve varyeteler her bayrak için tanımlanabilir. Bayrak değiştikçe hücre ve varyeteler değişse de karşılık geldikleri (ko)homoloji sınıfları bayraktan bağımsızdır ve sadece J veya λ ile belirlenirler.

Hatırlatma $G_{\mathbb{F}}(n,k)$ Grassmann manifoldu afin n-boyutlu uzayda k-boyutlu altuzaylarının kümesidir: Bu küme n-1 boyutlu projektif uzayın k-1 boyutlu doğrusal altuzaylarının kümesi olarak görülebilir. Bu projektif Grassmann manifoldunu $\mathbb{G}_{\mathbb{F}}(n-1,k-1)$ ile göstereceğiz.

Bu durumda $G_{\mathbb{F}}(4,2)=\mathbb{G}_{\mathbb{F}}(3,1)$ olur. Yukarıdaki sınıflar şu şekilde görülebilir: $F_* = \{F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq F_4\}$ bayrağı $\{p' \in \ell' \subset h'\}$ nokta $\in$ doğru $\subseteq$ düzlem bayrağına dönüşür.

$\sigma_1 = \{\ell \mid \ell \cap \ell' \neq \emptyset\}$

$\sigma_{1,1} = \{\ell \mid \ell \subseteq h'\}$

$\sigma_2 = \{\ell \mid p' \in \ell\}$

$\sigma_{2,1} = \{\ell \mid p' \in \ell \subset h'\}$.

Homoloji ve Kohomoloji

$G_{\mathbb{C}}(n,k)$: Her bir X_J veya X_λ $2(n-k-|\lambda|)$ - boyutlu bir hücrenin kapanışıdır.

$$C_i(G_{\mathbb{C}}(n,k)) = \begin{cases} 0 , & i \text{ tek sayı ise} \\ \bigoplus_{\substack{\lambda \\ 2[(n-k)-|\lambda|]=i}} \mathbb{Z} , & i \text{ çift sayı ise} \end{cases}$$

$$\rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial = 0} C_i \rightarrow$$

$$\Rightarrow H_i(G_{\mathbb{C}}(n,k)) = C_i(G_{\mathbb{C}}(n,k))$$

$$\Rightarrow H^i_{DR}(G_{\mathbb{C}}(n,k)) = C_i(G_{\mathbb{C}}(n,k)) \otimes \mathbb{R}$$

Euler sayısı $\chi(G_{\mathbb{C}}(n,k)) = \sum_{i=0}^{\wedge} \#\{\lambda \mid (n-k)-|\lambda| = i\}$

$G_{\mathbb{R}}(n,k)$: $C_i(G_{\mathbb{R}}(n,k)) = \bigoplus_{\substack{\lambda \\ (n-k)-|\lambda|=i}} \mathbb{Z}$

Homology ve kohomoloji hesabı için sınır/yapıştırma fonksiyonlarını belirlemek gerekir.

Diğer taraftan manifoldun Euler sayısı

$$\chi(G_{\mathbb{R}}(n,k)) = \sum_{i=0}^{k(n-k)} (-1)^i \#\{\lambda \mid i=(n-k)-|\lambda|\}$$

olur.

<u>Örnek:</u> $\chi(G_{\mathbb{C}}(4,2)) = 6 =$ Toplam hücre sayısı

$$\chi(G_{\mathbb{R}}(4,2)) = 1-1+2-1+1 = 2.$$

$\chi(G_{\mathbb{C}}(n,1)) = \chi(\mathbb{CP}^{n-1}) = n$

$$\chi(G_{\mathbb{R}}(n,1)) = \chi(\mathbb{RP}^{n-1}) = \begin{cases} 0, & n \text{ tek ise}, \\ 1, & n \text{ çift ise}. \end{cases}$$

<u>Örnek</u> $\mathbb{RP}^2$ için hücresel yapı ve homoloji?

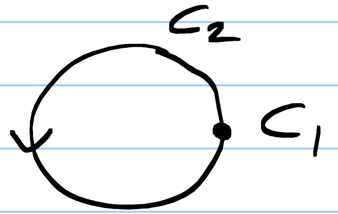
$\mathbb{RP}^2 = G_{\mathbb{R}}(3,1)$

$C_1 : [1\ 0\ 0] = pt$ 0-hücre

$C_2 : [*\ 1\ 0] = \mathbb{R}$ 1-hücre

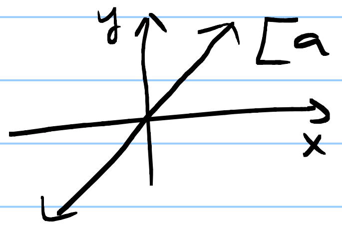
$C_3 : [*\ *\ 1] = \mathbb{R}^2$ 2-hücre

$X_2 = \overline{C_2} = [*\ *\ 0]$, $X_2 - C_2 = [*\ 0\ 0] = pt$



$C_2 : [a\ 1\ 0] = \text{span}\{ae_1 + e_2\}$

$\lim_{a\to\infty} \text{span}\{a e_1 + e_2\} = \text{span}\{e_1\}$



$[a\ 1\ 0] \xrightarrow[a\to\infty]{} x$-ekseni

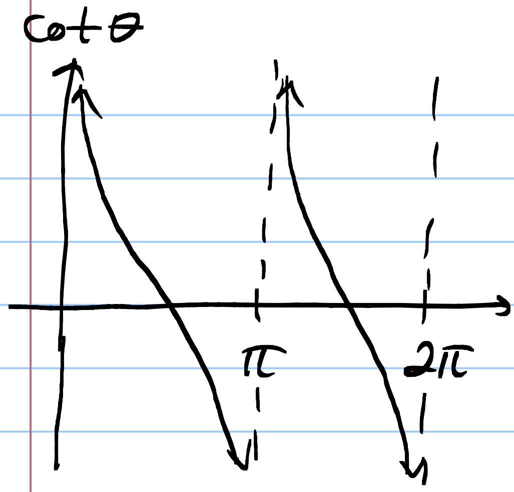
$a \to -\infty$

$X_3 = \overline{C_3} = [*\ *\ *]$, $X_3 - C_3 = [*\ *\ 0]$

$[a\ b\ 1] = [r\cos\theta\ \ r\sin\theta\ \ 1] \xrightarrow[r\to\infty]{} [\cos\theta\ \ \sin\theta\ \ 0]$

$0 \le \theta \le 2\pi$ $\quad 0 \le r < \infty$

$= [\cot\theta\ \ 1\ \ 0]$



θ 0'dan 2π'ye giderken $\cot\theta$ $-\infty$'den $+\infty$'a iki defa gider. Dolayısıyla 2-boyutlu hücrenin sınırı $X_1 = S^1$ çemberini iki defa dolanır.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_2(\mathbb{RP}^2) & \longrightarrow & C_1(\mathbb{RP}^2) & \longrightarrow & C_0(\mathbb{RP}^2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong & & \cong & & \cong & & \\
 & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & &
\end{array}
$$

$H_0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$

$H_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$

$H_2(\mathbb{RP}^2) = 0$

Kohomoloji Halkası: Bu bölümde $G_{\mathbb{C}}(n,k)$ komplex Grassmann manifoldunun kohomoloji halkasındaki çarpmadan bahsedeceğiz.

$H^*(G_{\mathbb{C}}(n,k))$ halkasının toplamsal grup yapısının Schubert sınıflarını taban kabul eden serbest abelyen grup olduğunu görmüştük:

$$H^*(G_{\mathbb{C}}(n,k)) = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{Z}\sigma_\lambda .$$ Bu durumda,

$\sigma_\lambda \in H^{|\lambda|}(G_{\mathbb{C}}(n,k))$, $\sigma_\mu \in H^{|\mu|}(G_{\mathbb{C}}(n,k))$ olmak üzere

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}\,\sigma_\nu$$ olacak şekilde tek bir şekilde yazılabilir.

$c^\nu_{\lambda,\mu}$ tam sayılarına Littlewood-Richardson katsayıları denir.

Örnek: $G_{\mathbb{C}}(4,2) = G_{\mathbb{C}}(3,1)$ Grassmann'ı için bu katsayıları hesaplayalım.
$(\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}(4,2) = 8)$

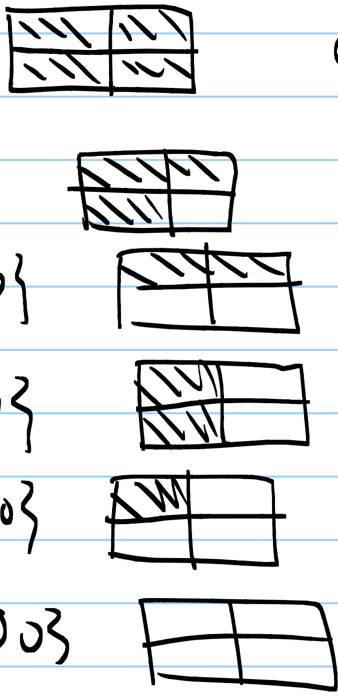
$$\sigma_1 = \{\ell \mid \ell \cap \ell' \neq \emptyset\} \in H^2(G_{\mathbb{C}}(4,2)) \simeq H_6(G_{\mathbb{C}}(4,2))$$
$$\sigma_{1,1} = \{\ell \mid \ell \subseteq h'\} \in H^4(G_{\mathbb{C}}(4,2)) \simeq H_4(G_{\mathbb{C}}(4,2))$$
$$\sigma_2 = \{\ell \mid p' \in \ell\} \in H^4(G_{\mathbb{C}}(4,2)) \simeq H_4(G_{\mathbb{C}}(4,2))$$
$$\sigma_{2,1} = \{\ell \mid p' \in \ell \subset h'\} \in H^6(G_{\mathbb{C}}(4,2)) \simeq H^2(G_{\mathbb{C}}(4,2))$$

$\sigma_2 \cdot \sigma_2 = \sigma_{2,2}$ (p' ve p'' gibi iki noktadan geçen tek bir doğru vardır)

$\sigma_{1,1} \cdot \sigma_{1,1} = \sigma_{2,2}$ (h' ve h'' gibi iki düzlem tek bir doğru boyunca kesişir)

Hatırlatma:

				Boyut
$x_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$a=\{0,0\}$	$\lambda=\{2,2\}$		0
$x_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$	$a=\{0,1\}$	$\lambda=\{2,1\}$		1
$x_{\{1,4\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$	$a=\{0,2\}$	$\lambda=\{2,0\}$		2
$x_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$	$a=\{1,1\}$	$\lambda=\{1,1\}$		2
$x_{\{2,4\}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$	$a=\{1,2\}$	$\lambda=\{1,0\}$		3
$x_{\{3,4\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$	$a=\{2,2\}$	$\lambda=\{0\}$		4



Diğer taraftan,

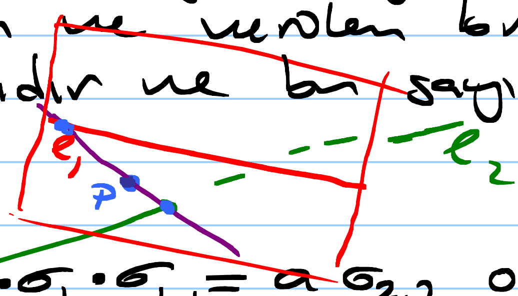
$\sigma_{1,1} \cdot \sigma_2 = 0$ ($p' \notin h'$ olmak üzere verilen bir h' düzleminin içinde kalan ve p' noktasından geçen bir doğru yoktur)

$\sigma_1 \cdot \sigma_1 = ?$ $\quad \sigma_1 \cdot \sigma_1 = a\,\sigma_{1,1} + b\,\sigma_2$ şeklinde olacaktır.

$$\sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = (a\,\sigma_{1,1} + b\,\sigma_2) \cdot \sigma_2 = b\,\sigma_{2,2}$$

Diğer taraftan bu sayı uzayda verilen iki (aykırı) doğruyu kesen ~~ve~~ verilen bir noktadan geçen doğruların sayısıdır ve bu sayı birdir.

$\Longrightarrow b = 1.$



Diğer taraftan, $\sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_{1,1} = a\,\sigma_{2,2}$ olur ve göre $a = 1$ dir, çünkü rastgele verilen bir düzlem ve bu doğru bir noktada kesişir. Dolayısıyla, iki aykırı doğruyu kesen ve bir düzlemde kalan tek bir doğru vardır.

O halde, $\sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_{1,1} + \sigma_2$ elde edilir.

Sonuç: $\sigma_1^4 = (\sigma_{1,1}+\sigma_2)^2 = \overbrace{\sigma_{1,1}^2}^{1} + \overbrace{\sigma_2^2}^{1} + 2\overbrace{\sigma_{1,1}\sigma_2}^{0}$
$= 2.$

O halde, uzayda ($\mathbb{CP}^3$) verilen rastgele dört doğruya da kesen iki doğru vardır.
Bu dört doğruyu $\mathbb{RP}^3$ içinde alırsak bunları kesen doğrularda gerçel doğrular olacaktır.

Hatırlatma: $\sigma_\lambda = \sigma_{\lambda_1,\lambda_2 \cdots \lambda_k}$ Schubert sınıfının duali

$\sigma_{n-k-\lambda_1, n-k-\lambda_2, \ldots, n-k-\lambda_k} \doteq \sigma_{\lambda^*}$ sınıfıdır ve

dolayısıyla $c^{\gamma}_{\lambda,\mu}$ Littlewood-Richardson katsayısı $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu \cdot \sigma_{\gamma^*}$ çarpımı olacaktır (Sayfa 36'ya bakınız).

Örnek: $Q \subseteq \mathbb{CP}^n$ içinde kuadratik bir hiperyüzey olsun. Kuadratik formların sınıflandırılması sayesinde bu hiperyüzey
$$z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_d^2 = 0 \quad (d \leq n)$$
denklemi ile verilir. Bu yüzey içindeki doğruların uzayını belirleyelim: $U_0 = \{[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \mid z_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n$ koordinat sisteminde Q $z_1^2 + \cdots + z_d^2 = 1$ ile verilir. $z_i = a_i t + b_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, Q içindeki bir doğrunun parametrizasyonu ise

* ⌈ $f=\sum_i a_i^2$, $g=\sum_i a_i b_i$, $h=(\sum_i b_i^2)-1$ olsun. $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ kümesi lineer bağımsızdır: $\nabla f=(u,0)$, $\nabla g=\frac{1}{2}(v,u)$, $\nabla h=(0,v)$
$u=(2a_1,2a_2,2a_3)$, $v=(2b_1,2b_2,2b_3)$, $\|u\|^2=0$, $\|v\|^2=4$, $u.v=0$. ⌋

$$1=\sum_{i=1}^{d} z_i^2 = t^2\left(\sum_{i=1}^{d} a_i^2\right)+2t\left(\sum_{i=1}^{d} a_i b_i\right)+\sum_{i=1}^{d} b_i^2, \quad \forall t\in\mathbb{C},$$

eşitliğini ve buradan da

$$\sum_{i=1}^{d} a_i^2=0, \quad \sum_{i=1}^{d} a_i b_i=0, \quad \sum_{i=1}^{d} b_i^2=1$$

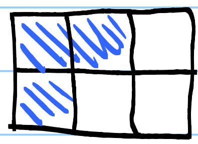
denklemlerini elde ederiz. Dolayısıyla, Q içindeki doğruların parametre uzayı $2n-3$ boyutludur.* Bir doğrunun parametre uzayı iki boyutlu olduğu için Q kuadratik hiperyüzey içindeki doğruların uzayı $2n-5$ boyutlu olacaktır.

Şimdi $n=4$ alalım ve $Q\subseteq\mathbb{CP}^4$ kuadratik hiperuzayının içindeki doğruların sınıfını belirleyelim. $\mathbb{CP}^4$ içindeki doğruların uzayı $G(4,1)=G_{\mathbb{C}}(5,2)$ Grassmann manifoldudur.

$$\dim G_{\mathbb{C}}(5,2)=3\cdot 2=6$$

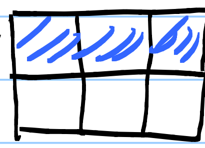
Bu doğruların uzayı $2n-5=2\cdot4-5=3$ boyutludur. $G_{\mathbb{C}}(5,2)$ içindeki 3-boyutlu sınıflar şunlardır:

$$C_{2,4}=\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma_{2,1}:$$



$J=\{2,4\}$
$a=\{1,2\}$ $\to \lambda=\{2,1\}$

$$C_{1,5}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma_3:$$



$J=\{1,5\}$
$a=\{0,3\}$ $\to \lambda=\{3,0\}$

Q içindeki doğruların sınıfı bu durumda

$\alpha = a\sigma_{2,1} + b\sigma_3$, $a, b \in \mathbb{Z}$, şeklindedir.

σ_3 sınıfı $\mathbb{CP}^4$ içinde belirli bir noktadan geçen doğruların uzayıdır. Dolayısıyla $\sigma_3 \cdot \sigma_3 = 1$ olmalıdır. Diğer taraftan, $\sigma_{2,1}$ sınıfı ise $\mathbb{CP}^4$ içindeki $\mathbb{CP}^3$ $(z_4=0)$ altuzayı içinde kalan ve $\mathbb{CP}^3$ içindeki $(z_2=z_3=z_4=0)$ doğrusunu kesen doğruların sınıfıdır.

İki farklı $\mathbb{CP}^3 \subseteq \mathbb{CP}^4$ bir düzlem $(\mathbb{CP}^2)$ boyunca kesişeceklerdir. Bu düzlem $\mathbb{CP}^3$'ler içindeki (yukarıdaki) doğruları birer noktada keseceklerdir. Dolayısıyla, $\sigma_{2,1} \cdot \sigma_{2,1}$ çarpımı (kesişimi) $\mathbb{CP}^2$ arakesit düzlemi içindeki iki noktadan geçen doğruların kümesidir. Böyle tek bir doğru vardır ve dolayısıyla, $\sigma_{2,1} \cdot \sigma_{2,1} = 1$ olmalıdır.

Benzer şekilde, $\sigma_3 \cdot \sigma_{2,1} = 0$ olduğu görülür.

Şimdi de aşağıdaki çarpımları hesaplayalım

$\alpha \cdot \sigma_3 = (a\sigma_{2,1} + b\sigma_3) \cdot \sigma_3 = b$ olur. σ_3 içindeki doğruların ortak noktası olan nokta Q içinde olmadığı sürece bu arakesit boş olacaktır. Dolayısıyla, $b=0$ dır.

Benzer şekilde $\alpha \cdot \sigma_{2,1} = a$ olur. $\alpha \cdot \sigma_{2,1}$ kesişimi ise $Q \cap \mathbb{CP}^3$ kuadratik yüzeyi üzerinde kalan ve $\mathbb{CP}^3$ içindeki $\mathbb{CP}^1$ doğrusunu kesen doğrulardır. $\mathbb{CP}^3$ içindeki $Q \cap \mathbb{CP}^3$ koniğinin rastgele bir noktasından geçen (ve koniğin içinde kalan) doğruların sayısı ise ikidir. Dolayısıyla $\alpha \cdot \sigma_{2,1}$ kesişimi 4 doğrudan oluşur. $\alpha \cdot \sigma_{2,1} = a = 4$'tür.

$Q \cap \mathbb{CP}^3 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

$\underline{P} = [0:0:0:1]$ $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ koordinat sisteminde

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \underline{1}$ $\quad$ $x_1 = t$, $x_2 = a_1 t$, $x_3 = a_2 t + 1$

$\Rightarrow (1 + a_1^2 + a_2^2) t^2 + 2a_2 t + 1 = \underline{1}$

$\Rightarrow a_2 = 0, \quad a_1 = \pm i$

$\Rightarrow \ell_1 : \{x_1 = t, x_2 = it, x_3 = 1\}, \ \ell_2 : \{x_1 = t, x_2 = -it, x_3 = 1\}$

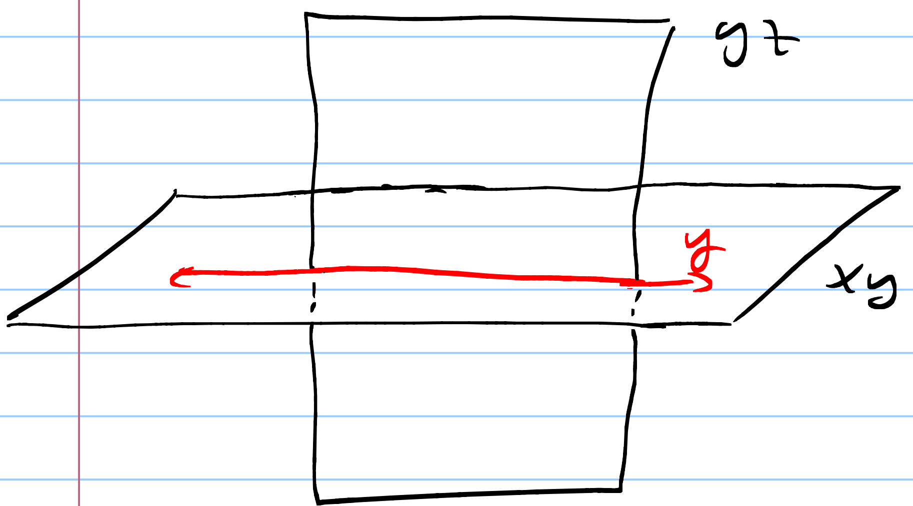
İki doğru!

Dolayısıyla, $\alpha = 4\sigma_{2,1}$ ve buradan da $\alpha^2 = 16$ olur. Bu da $\mathbb{CP}^4$ içinde rastgele seçilen iki kuadratik hiperyüzeyin arakesitinde toplam 16 doğru olduğunu gösterir.

4) Schubert Kalkülüse Giriş

Örnek: $G_{\mathbb{R}}(3,1)$ içindeki $X_2 = [* \ * \ 0]$ Schubert varyetesini kendisi ile nasıl kesiştiririz?

X_2 xy-düzlemindeki kalan tüm doğruların (orijinden geçen!) kümesidir. Dik kesişim elde etmek için bu düzlemi, homoloji sınıfını değiştirmeden, döndürerek yz-düzlemi haline getiririz ve sonra kesişim alırız.



Kesişimin çarpık olduğunu görün.

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ herhangi bir sıralı baz ve
$F_* = \{F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n\}$, $F_i = \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$
bu bazın belirlediği bayrak olsun.

$\tilde{B} = \{e_n, e_{n-1}, \dots, e_1\}$ sıralı bazı B'nin tersi olarak adlandırılır ve benzer şekilde
$\tilde{F}_* = \{\tilde{F}_1 \subset \tilde{F}_2 \subset \dots \subset \tilde{F}_n\}$,

$\tilde{F}_i = \text{span}\{e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n-i+1}\}$ bayrağına

da $\tilde{F}_*$'in tersi denir.

Örnek: $n=7$, $k=3$, $J=\{J_1,J_2,J_3\}=\{2,4,5\}$

$$C_{2,4,5}(F_*)=\{V\in G_{\mathbb{C}}(7,3) \mid \dim V\cap F_{J_i}=i\}$$

$$=\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{2,4,5}(F_*)=\{V\in G_{\mathbb{C}}(7,3) \mid \dim V\cap F_i\geq 2\}$$

$$=\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

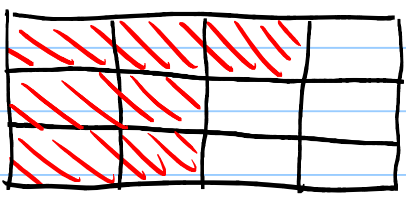
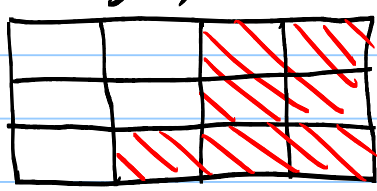
Diğer taraftan

$$C_{2,4,5}(\tilde{F}_*)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

ve $$X_{2,4,5}(\tilde{F}_*)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

$X_{2,5,5}(\tilde{F})$ ve $X_{2,4,5}(\tilde{F}_*)$ varyeteleri homotopik olduğu daha belirledikleri sınıflar aynıdır. Bu sınıfların Young tabloları da birbirinden 180° döndürülerek elde edilir.

$J=(2,4,5)\to a=(1,2,2)\to \lambda=(3,2,2)$

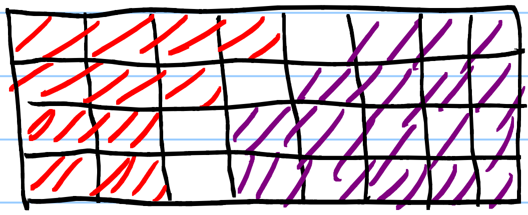
$\sigma_\lambda(F_*)=$  $\sigma_\lambda(\tilde{F}_*)=$ 

$\sigma_7 \in H^{17}(G_{\mathbb{C}}(7,3))$, $\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}(7,3) = 2\cdot(3\cdot 4) = 24$

<u>Önerme</u>: Eğer $X_\lambda(F_*) \cap X_\mu(\tilde{F}_*) \neq \emptyset$ ise her $1 \leq i \leq n-k$ için, $\lambda_i + \mu_{k+1-i} \leq n$ olur.

Başka iki sınıfın kesişiminin boş olmaması için $X_\lambda(F_*)$ ve $X_\mu(\tilde{F}_*)$ varyetelerinin Young tabloları ayrık olmalıdır.

$n=12$
$k=4,\ n-k=8$

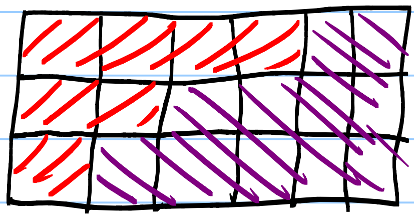


$X_\lambda(F_*)$ $\quad X_\mu(\tilde{F}_*)$

$\lambda = (4,3,2,2) \qquad \mu = (5,5,4,3)$

<u>Önerme</u>: Eğer $X_\lambda(F_*)$ ve $X_\mu(\tilde{F}_*)$ ayrıklar ve Young tabloları arasında hiç boşluk yoksa $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = 1$ olur.

<u>Kanıt</u>:
$n=9$
$k=3,\ n-k=6$



$\lambda = (4,2,1) \qquad \mu = (5,4,2)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$a = (2,4,5) \qquad a = (1,2,4)$

$\downarrow$

$J_1 = (3,6,8) \qquad J_2 = (2,4,7)$

$$C_{J_1}(F_*)=\begin{bmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 & * & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{J_2}(F_*)=\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & * & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{J_2}(\tilde{F}_*)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

$C_{J_1}(F_*) \cap C_{J_2}(\tilde{F}_*)$ (Kesişimde tüm $*$'lar 0 olur!)

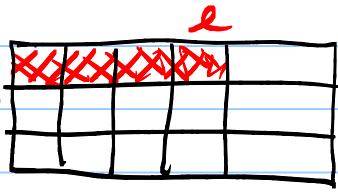
$C_{J_1}(F_*)$ ve $C_{J_2}(\tilde{F}_*)$ çapraz şekilde ve tek noktada ($V=\mathrm{span}\{e_3, e_6, e_8\}$) kesişirler. Aslında V noktası

$C_{J_1}(F_*) \simeq \mathbb{C}^{11} \leq \mathbb{C}^{18}$ ve $C_{J_2}(\tilde{F}_*) = \mathbb{C}^7 \leq \mathbb{C}^{18}$

altuzaylarının her ikisinde de orijine karşılık gelir ve dolayısıyla çapraz kesişirler.

Bu şekilde kesişen iki sınıfa birbirinin duali denir, σ_λ sınıfının duali σ_{λ^*} ile gösterilir.

İki sınıfın çarpımına geçmeden önce özel bir hali ele alalım.

$\ell \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$ olmak üzere $\sigma_\ell =$  sınıfına özel Schubert sınıfı ismini vereceğiz.

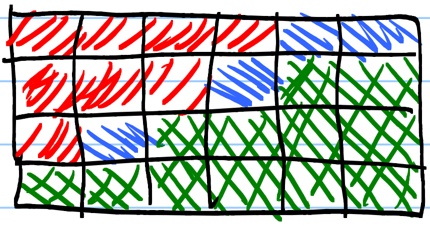
Pieri Formülü olarak bilinen sonuç herhangi bir sınıfın özel bir sınıf ile çarpımını ifade eder:

Teorem (Pieri Formülü)

$\sigma_\lambda \in H^{|\lambda|}(G_{\mathbb{C}}(n,k))$ herhangi bir Schubert sınıfı, ve $\sigma_l \in H^l(G_{\mathbb{C}}(n,k))$ özel bir Schubert sınıfı olmak üzere

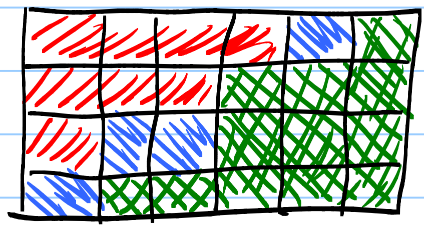
$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_l = \sum_{\lambda'} \sigma_{\lambda'}$$

, öyle ki λ' λ'dan herhangi ikisi alt alta olmamak üzere l tane kutu eklenerek elde edilmiştir.



λ, μ, $l=4$

veya



λ, μ, $l=4$

.....

Hatırlatma: Gerçel Grassmannların $\mathbb{Z}_2$-değerli kohomolojisi için Young tabloları ile hesaplama yapma yöntemleri üzerine yapılmış 2013 tarihli bir çalışma (2) numaralı referansta verilmiştir.

(2) Casian, L., Kodama, Y., On the cohomology of Real Grassmannian manifolds, Arxiv:1309.5520v1.

Pieri Formulünün Kanıtı (s. 145–152, Fulton)

$F_\bullet$ $\mathbb{C}^n$ için bir bayrak ve $\widetilde{F}_\bullet$ bunun tersi olsun. $X_\lambda(F_\bullet)$ ve $X_\mu(\widetilde{F}_\bullet)$ iki Schubert varyete olsun.

$\lambda = \{\lambda_i\}$, $\mu = \{\mu_i\}$

$$n-k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$$
$$n-k \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k \geq 0$$

$$A_i = F_{n-k+i-\lambda_i}, \quad B_i = \widetilde{F}_{n-k+i-\mu_i}, \quad C_i = A_i \cap B_{k+1-i}$$

Önerme 1: $C_i = \operatorname{span}\{e_j \mid i+\mu_{k+1-i} \leq j \leq n-k+i-\lambda_i\}$

Dolayısıyla, $\dim C_i = \begin{cases} n-k+1-\lambda_i-\mu_{k+1-i} & \text{eğer } \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } < 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Kanıt: $A_i = F_{n-k+i-\lambda_i} = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-k+i-\lambda_i} \rangle$

$$B_{k+1-i} = \widetilde{F}_{n-k+k+1-i-\mu_{k+1-i}} = \widetilde{F}_{n+1-i-\mu_{k+1-i}}$$
$$= \langle e_{i+\mu_{k+1-i}}, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$$

$$C_i = \langle e_j \mid i+\mu_{k+1-i} \leq j \leq n-k+i-\lambda_i \rangle$$

Önerme 2 $X_\lambda(F_\bullet) \cap X_\mu(\widetilde{F}_\bullet) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart, her $1 \leq i \leq k$ için

$$\lambda_i + \mu_{k+1-i} \leq n-k$$ olmasıdır.

Kanıt: $V \in X_\lambda(F_\bullet) \cap X_\mu(\tilde{F}_\bullet)$ olsun. O halde, her $1 \le i \le k$ için, varyetelerin tanımından dolayı

$$\dim(V \cap A_i) \ge i \quad \text{ve} \quad \dim(V \cap B_{k+1-i}) \ge k+1-i$$

olmalıdır. Diğer taraftan, $\dim V = k$ ve $i + (k+1-i) = k+1$ olduğu için $(V \cap A_i) \cap (V \cap B_{k+1-i})$ arakesiti en az bir boyutludur. Dolayısıyla, $\dim(A_i \cap B_{k+1-i}) \ge 1$ olmalıdır. Son olarak bir önceki önermeden

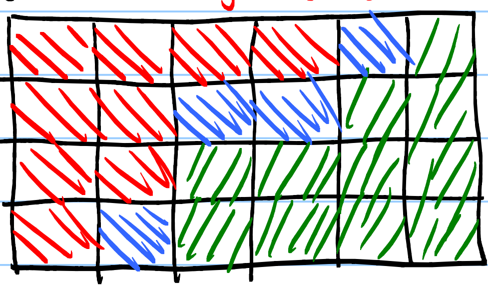
$$1 \le \dim(A_i \cap B_{k+1-i}) = \dim(C_i) = n-k+1-\lambda_i-\mu_{k+1-i}$$

$$\Rightarrow \lambda_i + \mu_{k+1-i} \le n-k$$ elde edilir.

Böylece önermenin "$\Rightarrow$" yönü kanıtlanmış oldu.
Yukarıdaki adımlar tersine çevrilebilir ve dolayısıyla önermenin diğer yönü de kanıtlanmış olur.

Pieri formülünü kanıtlamak için formülün her iki tarafını, $|\nu| = k(n-k) - |\lambda| - \ell$ koşulunu sağlayan tüm $X_\nu(\tilde{F}_\bullet)$ varyeteler ile kesiştirerek aynı kesişim sayılarını elde ettiğimizi göstereceğiz (Poincaré izomorfizması kesişim formunun soysuzlaşmamış olduğunu söyler)

Örnek: $n = 10$
$k = 4$
$\lambda = (4,2,2,1)$
$\nu = (4,4,2,1)$



$\ell = 4$

$n-k = 6$

Gözlem 1: λ ve μ endekslerinin yukarıdaki gibi olması için gerek ve yeter şart

$$(*) \quad n-k-\lambda_k \geq \mu_1 \geq n-k-\lambda_{k-1} \geq \mu_2 \geq \cdots \geq n-k-\lambda_1 \geq \mu_k \geq 0$$

olmasıdır.

Gözlem 2: $1 \leq \ell \leq n-k$ olmak üzere σ_ℓ sınıfının standart bayraktaki varyetesi aşağıdaki gibidir.

$\lambda = (\ell, 0, 0, \dots, 0)$, $a = (n-k-\ell, n-k, n-k, \dots, n-k)$.

$$X_J(F_\bullet) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & & n-k-\ell+1 & & & & & & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & & * & 0 & * & * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 & * & \ddots & \vdots \\ * & * & & * & 0 & * & * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \; * \end{bmatrix} \end{array}$$

O halde,

$L = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-k-\ell+1} \rangle \quad (\dim L = n-k-\ell+1)$

olmak üzere $X_J(F_\bullet)$ varyetesi şu şekilde ifade edilebilir.

$$X_J(F_\bullet) = \{ V \in \mathbb{G}(n,k) \mid \dim(V \cap L) \geq 1 \} = X_\ell(L)$$

Bu varyeteyi $X_\ell(L)$ ile göstermek daha uygun olacaktır. Ayrıca, bu standart L vektör uzayını V içindeki herhangi bir $n-k-\ell+1$ boyutlu bir L' alt uzayı alırsak karşılık gelen kohomoloji sınıfı değişme

yecektir (çünkü bu iki varyete homotopik-
tir):
$$[X_\ell(L)] = [X_\ell(L')] \in H^\ell(G_{\mathbb{C}}(n,k)).$$

İleri formülünü kanıtlamak için iki şeyi göstermeliyiz.

A) Gözlem 1'deki (*) eşitsizliğini sağlayan λ, μ ve ℓ ($|\lambda|+|\mu|+\ell=(n-k)k$) için

$$X_\lambda(F_*) \cap X_\mu(\tilde{F}_*) \cap X_\ell(L) \text{ arakesiti tek bir}$$

vektör uzayıdır.

B) Aksi halde, aynı arakesit boş kümedir.

<u>Önerme 3</u>: $A_0 = 0, B_0 = 0$, A_i, B_i, C_i, $i=1,\ldots,k$, yukarıdaki gibi ve $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_k \subseteq \mathbb{C}^n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $C = \bigcap_{i=0}^{k} (A_i + B_{k-i})$

b) $\sum_{i=1}^{k} \dim(C_i) = k + \ell$

c) $C = C_1 + \ldots + C_k$ toplamının direkt toplam olması için gerek ve yeter şart (*) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt: a) $C_i = A_i \cap B_{k+1-i}$, $i=1,2,\dots,k$, olduğunu biliyoruz.

İlk önce $(A_0+B_k)\cap(A_1+B_{k-1}) = B_k \cap (A_1+B_{k-1})$ vektör uzayının C_1+B_{k-1} olduğunu kolayca görürüz.

Benzer şekilde

$$(A_0+B_k)\cap(A_1+B_{k-1})\cap(A_2+B_{k-2}) = (C_1+B_{k-1})\cap(A_2+B_{k-2})$$

uzayının $C_1+C_2+B_{k-2}$ olduğunu görürüz.

Bu şekilde devam edersek

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=0}^{k}(A_i+B_{k-i}) &= C_1+C_2+\dots+C_k+B_0\\ &= C_1+C_2+\dots+C_k\\ &= C\end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

b) $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\dim C_i &= \sum_{i=1}^{k}(n+k-1)-\lambda_i-\mu_{k+1-i}\\ &= k(n+k+1)-|\lambda|-|\mu|\\ &= [k(n+k)-|\lambda|-|\mu|]+k\\ &= \ell+k.\end{aligned}$$

c) İlk önce

$$(*)\quad n-k-\lambda_k \geq \mu_1 \geq n-k-\lambda_{k-1} \geq \mu_2 \geq \dots \geq n-k-\lambda_1 \geq \mu_k \geq 0$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim.

O halde, $\mu_{k-i} \geq n-k-\lambda_i$ ve buradan da

$\mu_{k-i}+i+1 \geq i+(n-k)+1-\lambda_i > n-k-\lambda_i+i$ elde ederiz.

Diğer taraftan,

$$C_i = \langle e_j \mid i + \mu_{k+1-i} \leq j \leq n-k+i-\lambda_i \rangle$$

olduğu için

$$C_{i+1} = \langle e_j \mid i+1+\mu_{k-i} \leq j \leq n-k+i+1-\lambda_{i+1} \rangle$$

olur. Dolayısıyla, $C_i \cap C_{i+1} = \emptyset$ olur.
$C_i \cap C_{i+r} = \emptyset$, $r \geq 1$ olduğu açıktır.
O halde, $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_k$ direkt toplamıdır.
Bu adımları ters sırada gidebileceğimiz açıktır. Böylece kanıt tamamlanır. ■

<u>Önerme 4</u>: a) Eğer bir $V \in G_{\mathbb{C}}(n,k)$ elemanı

$X_\lambda(F_*) \cap X_\mu(\tilde{F}_*)$ ara kesiti içinde ise

$V \subseteq C$ olmalıdır.

b) Ayrıca, $C_1, \ldots, C_k$ alt uzayları ayrık ise (diğer bir deyişle $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_k$) ise her $i = 1, \ldots, k$, için $\dim(V \cap C_i) = 1$, ve

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} (V \cap C_i) \text{ olur.}$$

<u>Kanıt</u>: Önerme 3'ün (a) şıkkından dolayı, her i için $V \subseteq A_i + B_{k-i}$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $A_i \cap B_{k-i} \neq \emptyset$ ise $\mathbb{C}^n = A_i + B_{k-i}$

olacağından $V \subseteq A_i + B_{k-i}$ olacaktır. Dolayısıyla, $A_i \cap B_{k-i} = \emptyset$ olduğunu kabul edebiliriz. Diğer taraftan, $V \subseteq G_{\mathbb{C}}(n,k)$ olduğundan

$\rightarrow \dim(V \cap A_i) \geq i$ ve $\dim(V \cap B_{k-i}) \geq k-i$ olur.

Ayrıca, $\dim V = k$ olduğuna göre

$V = (V \cap A_i) \oplus (V \cap B_{k-i})$ olmalıdır ve dolayısıyla $V \subseteq A_i + B_{k-i}$ elde edilir.

$\dim(V \cap A_i) \geq i$ ve $\dim(V \cap B_{k-i+1}) \geq k+1-i$ olduğu için $\dim(V \cap C_i) \geq i + (k+1-i) - \dim V = 1$ olur. Diğer taraftan $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ayrık alt uzaylar oldukları için

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} (V \cap C_i)$$ ve dolayısıyla her i için

$\dim(V \cap C_i) = 1$ olur. ■

Şimdi Pieri formülünün kanıtını tamamlayabiliriz. Bunun için Önerme 3'ün öncesinde verdiğimiz (A) ve (B) iddialarını kanıtlayacağız.

<u>(B)'nin kanıtı:</u> Bu durumda Önerme 3'den dolayı C alt uzayı C_i'lerin direkt toplamı değildir ve bu yüzden $\dim C \leq k+l-1$ olmalıdır. O halde, boyutu $n-k-l+1$ olan rastgele bir L alt uzayı C ile sadece orijinde kesişecektir. Dolayısıyla, $X_\lambda(F_\bullet) \cap X_\mu(\tilde{F}_\bullet)$ arakesitinde kalan hiç bir

V alt uzayı $\mathcal{X}_\ell(L)$ içinde kalamaz.
Başka bir deyişle, $\mathcal{X}_\lambda(F_*) \cap \mathcal{X}_\mu(\tilde{F}_*) \cap \mathcal{X}_\ell(L) = \emptyset$ olur. Böylece, (B)'nin kanıtı biter.

(A)'nın kanıtı: Bu durumda göre Önerme 3'den dolayı $C = \bigoplus_{i=1}^{k} C_i$ ve $\dim C = k+\ell$ olur. $\dim L = n-k-\ell+1$ olduğu için, L yeterince rastgele ise, $L \cap C$ arakesiti bir boyutlu olur:

$L \cap C = \mathbb{C} \cdot v$, $v = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, öyle ki

$u_i \in C_i$, $u_i \neq 0$. $\mathcal{X}_1(L)$ varyetesinin tanımından dolayı her $V \in G_{\mathbb{C}}(n,k)$ için $\dim_{\mathbb{C}}(V \cap L) \geq 1$ olur.

O halde, $V \in \mathcal{X}_\lambda(F_*) \cap \mathcal{X}_\mu(\tilde{F}_*)$ ise $V \subset C$ olacağından (Önerme 4.a) yukarıdaki v vektörü V uzayının içinde kalmalıdır, $v \in V$. Ayrıca, $V = \bigoplus_{i=1}^{k} (V \cap C_i)$ olduğundan $u_i \in V$ olur.
O halde, $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ kümesi V için bir taban oluşturur.
Başka bir deyişle, $\mathcal{X}_\lambda(F_*) \cap \mathcal{X}_\mu(\tilde{F}_*) \cap \mathcal{X}_\ell(L)$ arakesiti tek bir noktadan, $\mathrm{span}\{u_1, \dots, u_k\}$, oluşur.
Son olarak, daha önce yaptığımız gibi (Pieri formülün verildiği teoremden önceki kanıtın son kısmına bakınız) bu üç varyetenin kesişiminin çapraz olduğunu gözlemleyin.
Böylece Pieri formülünün kanıtı tamamlanır. ∎

Giambelli Formülü olarak bilinen aşağıdaki sonuç, verilen bir Schubert sınıfının özel Schubert sınıfları cinsinden ifadesini verir. Dolayısıyla, Pieri formülü bu sonuçla beraber herhangi iki Schubert sınıfının çarpımının hesaplanabilmesi için bir yöntem verir. Diğer taraftan, bu metodu pratikte uygulamak pek kolay olmayabilir.

<u>Teorem</u> (Giambelli Formülü)
Verilen bir $\sigma_\lambda \in H^{|\lambda|}(G_{\mathbb{C}}(n,k))$ sınıfı için

$$\sigma_\lambda = \det\left(\sigma_{\lambda_i+j-i}\right)_{1\le i,j\le k}$$ eşitliği doğrudur.

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ olmak üzere

$$\sigma_\lambda = \begin{vmatrix} \sigma_{\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1+1} & \sigma_{\lambda_1+2} & \cdots & \sigma_{\lambda_1+k-1} \\ \sigma_{\lambda_2-1} & \sigma_{\lambda_2} & \sigma_{\lambda_2+1} & \cdots & \sigma_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{\lambda_k-k+1} & \sigma_{\lambda_k-k+2} & \sigma_{\lambda_k-k+3} & \cdots & \sigma_{\lambda_k} \end{vmatrix}$$

Burada σ_{λ_i+j-i} endeksi λ_i+j-i olan özel Schubert sınıfını göstermektedir.

Bu formülün kanıtı Schur polinomlarının determinant formülü olarak bilinen bir sonucun Grassmannların kohomolojisine uyarlanması ile verilir. Biz bu notlarda bu konulara değinmeyeceğiz.

Hatırlatma: Schubert sınıflarını hesaplamanın daha pratik yolları mevcuttur. Örneğin D. Coşkun'un notları bunlardan birini sunmaktadır.

Son olarak Grassmann manifoldların vektör demetleri için sınıflandırma uzayları olduğunu belirtelim: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismini gösterelim. $G_{\mathbb{F}}(n,k)$ Grassmann uzayı üzerinde doğal bir rankı k olan vektör demeti vardır:

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{F}^k \to \xi = \{ (x,V) \in \mathbb{F}^n \times G_{\mathbb{F}}(n,k) \mid x \in V \} \\
\quad\ \ \pi \downarrow \qquad\qquad\qquad \pi(x,V) = V \\
\quad G_{\mathbb{F}}(n,k)
\end{array}
$$

Teorem: X (eli yüzü düzgün) bir topolojik uzay ve $E \to X$, X üzerinde rankı k olan bir $\mathbb{F}$-vektör demeti olsun. Bu durumda öyle bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $f: X \to G_{\mathbb{F}}(n,k)$ sürekli fonksiyonu vardır ki

$$f^*(\xi) \to X$$

geri çekme vektör demeti $E \to X$ demetine izomorfiktir. Ayrıca, bu koşulu sağlayan iki ayrı $f, g: X \to G_{\mathbb{F}}(n,k)$ fonksiyonu homotopiktir.

Ayrıca, $G_{\mathbb{C}}(n,k)$ manifoldunun kohomoloji sınıfları $\xi \to X$ demetinin Chern sınıfları ve $G_{\mathbb{R}}(n,k)$ manifoldunun $\mathbb{Z}_2$-değerli kohomoloji sınıfları Stiefel–Whitney sınıfları tarafından üretilir. Son olarak Λ $1/2$'yi içeren bir "integral domain" ise (örneğin, $\mathbb{Z}[1/2]$, $\mathbb{Q}$ veya $\mathbb{R}$) $G^+_{\mathbb{R}}(n,k)$ Grassmann manifoldunun Λ değerli kohomoloji sınıfları, bu doğal demetin Euler ve Pontryagin sınıfları tarafından üretilir.

$G^+_{\mathbb{R}}(n,k)$ yönlendirilmiş Grassmann manifoldunun $\mathbb{Z}$-değerli kohomolojisi üzerine sonuçlardan biri sonraki bölümde bahsedeceğiz.

5) Grassmannlar üzerinde geometrik yapılar ve (ko)homolojilerin doğal üreteçleri. Bu bölümde de Shi–Zhou'nun makalesindeki sonuçların bir kısmını sunmaya çalışacağım.

A) Gauss–Bonnet Teoremi'nin bir genellemesi:

Gauss–Bonnet Theoremi şu şekilde ifade edilebilir:

Eğer $f: \Sigma_g \to \mathbb{R}^n$ bir daldırma fonksiyonu ve $g: \Sigma_g \to G(n,2)$ Gauss gönderimi olsun. Bu durumda,

$$f_*([\Sigma_g]) \in H_2(G^+_{\mathbb{R}}(n,2); \mathbb{Z}) \text{ içinde}$$

$$f_*([\Sigma_g]) = (1-g)[S^2] = (1-g)\left[G^+_{\mathbb{R}}(3,2)\right],$$

burada $G^+_{\mathbb{R}}(3,2) \hookrightarrow G^+_{\mathbb{R}}(n,2)$ doğal içerme fonksiyonu yardımıyla bir altmanifold olarak görülür.

Shi–Zhou §9, s.521 M tıkız yönlendirilmiş 4 boyutlu manifold verilsin. Ayrıca, $f: M \to \mathbb{R}^8$ daldırma fonksiyonu ve $g: M \to G^+_{\mathbb{R}}(8,4)$ f'in Gauss gönderimi olsun. Bu durumda

$$g_*([M]) = \frac{1}{2}\chi(M)[G^+_{\mathbb{R}}(5,4)] + \lambda([G^+_{\mathbb{R}}(5,1)]) + \frac{3}{2}\tau(M)[G^+_{\mathbb{R}}(4,2)].$$

Eğer $f: M \to \mathbb{R}^6$ veya $f: M \to \mathbb{R}^7$ daldırma fonksiyonu olursa

$$g_*([M]) = \frac{1}{2}\chi(M)\,[G_{\mathbb{R}}^{+}(5,4)] + \frac{3}{2}\tau(M)\,[G_{\mathbb{R}}^{+}(4,2)].$$

<u>Hatırlatma:</u> Eğer $\lambda \neq 0$ ise $f: M \to \mathbb{R}^8$ daldırması $\mathbb{R}^7$'ye indirgenemez! Dolayısıyla, bu formüller daldırma fonksiyonları için birer koşul belirlerler.

Herhangi bir $\mathbb{R}^N$'e daldırılmış veya gömülmüş bir manifold üzerine konan çeşitli geometrik yapılar Grassmannların özel bazı homoloji sınıflarını manifoldun cebirsel topolojisi ile ilişkilendirir ve bu daldırma ve gömme fonksiyonları üzerine fazladan koşullar koyar.

B) <u>Grassmannların hacimleri</u>

$M(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ üzerine standart iç çarpımı koyalım:

$$A, B \in M(n,\mathbb{R}), \quad (A,B) = tr(A^t B)$$

Bu iç çarpım $GL(n,\mathbb{R})$ ve dolayısıyla tüm alt manifoldlar üzerine bir Riemann metriği koyar. Bu metriğe göre

$$V(S^{2n-1}) = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}, \quad V(S^{2n}) = \frac{2^{2n+1}\, n!\, \pi^n}{(2n)!}$$

ve $V(SO(n)) = 2^{\frac{1}{2}(n-1)}\, V(S^{n-1})\, V(SO(n-1))$ olur.

Ayrıca,

$$V(G^+_{\mathbb{R}}(k,n)) = \frac{V(SO(n))}{2^{\frac{1}{2}k(n-k)}\, V(SO(k))\, V(SO(n-k))}$$

$$= \frac{V(S^{n-1}) \cdots V(S^{n-k})}{V(S^{k-1}) \cdots V(S^{1})}$$

Örneğin, $V(G^+_{\mathbb{R}}(n+2,2)) = \dfrac{2(2\pi)^n}{n!}$

$V(G^+_{\mathbb{R}}(6,3)) = \frac{2}{3}\pi^5$, $V(G^+_{\mathbb{R}}(7,3)) = \frac{16}{45}\pi^6$

$V(G^+_{\mathbb{R}}(8,3)) = \frac{2}{45}\pi^8$, $V(G^+_{\mathbb{R}}(8,4)) = \frac{8}{135}\pi^8$

Bu makalede ayrıca yönlendirilmiş Grassmann manifoldların (ko)homolojisi üzerine yeni sonuçlar da bulunmaktadır.

Örneğin, $\mathbb{C}P^2 = G_{\mathbb{C}}(3,1) \subseteq G^+_{\mathbb{R}}(8,4)$,

$*\mathbb{C}P^2 = G_{\mathbb{C}}(3,2) \subseteq G^+_{\mathbb{R}}(8,4)$ ve $G^+_{\mathbb{R}}(4,2) \subseteq G^+_{\mathbb{R}}(8,4)$

4-boyutlu alt manifoldları $H_4(G^+_{\mathbb{R}}(8,4),\mathbb{Z})$ grubunun üreteçleridir.

Aynı grubun bir başka üreteç listesi $[G^+_{\mathbb{R}}(7,4)]$, $[G^+_{\mathbb{R}}(7,3)]$, $[CAY] + [G^+_{\mathbb{R}}(7,4)] - [G^+_{\mathbb{R}}(7,3)]$ dir.