Komütatif Cebire Giriş:

1. Bölüm: Halkalar ve İdealler

Üzerinde toplama (+) ve çarpma (·) olarak adlandırılan iki işlem olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı bir A kümesine halka denir:

1) $(A,+)$ ikilisi değişmeli bir gruptur.

2) Çarpma işleminin birleşme ve toplama üzerine dağılma özellikleri vardır:

Her $x,y,z \in A$ için

- $(xy)z = x(yz)$ ve
- $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$ dır.

Bu derste sadece birim elemanı olan değişmeli halkaları ele alacağız:

3) Her $x,y \in A$ için $xy = yx$,

4) Öyle bir $1 \in A$ elemanı vardır ki her $x \in A$ için $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ sağlanır.

Bundan sonra halka ifadesini yukarıdaki dört özelliği sağlayan kümeler için kullanacağız.

Uyarı: Yukarıdaki halka tanımı $1=0$ durumuna izin vermektedir. Elbette bu durumda

$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ ve dolayısıyla A halkası sadece sıfır elemanından oluşur.

A ve B iki halka olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f: A \to B$ fonksiyonuna bir (halka) homomorfizması denir:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

ii) $f(xy) = f(x) f(y)$,

iii) $f(1) = 1$.

Herhangi bir $S \subseteq A$ alt kümesi $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında bir halka oluşturuyorsa, S'ye bir alt halka denir.

Eğer $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ halka homomorfizmaları ise $g \circ f: A \to C$ bileşkesi de bir halka homomorfizması olur.

<u>İdealler ve Bölüm Halkası:</u>

R ve S, A halkasının alt kümeleri ise $R.S$ kümesi

$R \cdot S = \{ rs \mid r \in R, s \in S \}$ olarak tanımlanır.

A halkasının bir $I \subseteq A$ alt halkası, $AI \subseteq I$ koşulunu sağlıyorsa I alt halkasına bir ideal denir.

$I \subseteq A$ bir ideal ise R/I bölüm grubu doğal bir halka yapısına sahiptir ve

$\phi: A \to A/I$, $\phi(a) = a + I$, bir (halka) homomorfizmadır.

<u>Önerme 1.1:</u> A halkasının I idealini içeren idealleri ile A/I halkasının idealleri arasında kapsama bağıntısını koruyan $J \to \phi^{-1}(J)$ eşlemesi birebirdir.

Verilen bir $f: A \to B$ halka homomorfizması için $\ker(f) = f^{-1}(0)$ bir idealdir ve

$A/\ker(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$, $x + \ker(f) \longmapsto f(x)$ bir izomorfizmadır.

Sıfır-Bölenler, Nilpotent ve Birim Elemanlar

Eğer bir $x \in A$ elemanı sıfırdan farklı bir $y \neq 0$ elemanı için $xy = 0$ koşulunu sağlıyorsa bu elemana sıfır bölendir denir. Sıfır böleni olmayan ve $1 \neq 0$ halkalara tamlık bölgesi (integral domain) denir.

Eğer bir $x \in A$ elemanı, herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n = 0$ koşulunu sağlıyorsa bu elemana nilpotent denir.

Bir $x \in A$ elemanı için $xy = 1$ olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı varsa, $x \in A$ elemanına birim eleman denir.

Birim elemanlar çarpma işlemine göre bir değişmeli grup oluştururlar.

Herhangi bir $x \in A$ için $(x) = \{ax \mid a \in A\}$ kümesi bir ideal oluşturur. $(x) = A$ olması ancak x'in birim eleman olması durumunda gerçekleşir.

(x) idealine esas ideal denir. Bir halka içindeki tüm idealler esas ideal ise, halkaya esas ideal bölgesi denir.

Sıfır elemanı dışında her elemanı birim olan halkaya cisim denir. Her cisim integral alandır ama tersi doğru değildir ($\mathbb{Z}$ cisim değildir ama bir tamlık bölgesidir).

Önerme 1.2.: $A \neq 0$ bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

i) A bir cisimdir

ii) A'nın $0 = (0)$ ve $(1) = A$'dan başka ideali yoktur.

iii) A üzerinde tanımlı her $f: A \to B$ homomorfizması birebirdir.

Kanıt: (iii) $\Rightarrow$ (i) $x \in A$ birim eleman olmasın. O halde, $(x) \neq A$ ve dolayısıyla $A/(x) \neq 0$ olur.

Bu durumda $\phi : A \to A/(x)$ 1-1 homomorfizması için $\phi(x) = 0$ olduğuna göre $x = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, kanıt biter. ∎

Asal ve Maksimal İdealler

Bir $p \subseteq A$ ideali için aşağıdaki koşul sağlanıyorsa bu ideale asal ideal denir:
$x, y \in A$ ve $xy \in P$ ise ya $x \in P$ yada $y \in P$ olur.
Bir $m \subseteq A$ idealine maksimal denir eğer $m \neq (1)$ ve $m \subset I \subset A$ olacak şekilde bir I ideali yoksa.

Gözlem: 1) $p \subseteq A$ ideali asaldır ancak ve ancak A/p halkasının sıfır böleni yoktur.

2) $m \subseteq A$ ideali maksimaldir ancak ve ancak A/m halkası bir cisimdir.

Dolayısıyla, her maksimal ideal asaldır.

Teorem: Her $A \neq 0$ ringinin en az bir maksimal ideali vardır.

Kanıt: Zorn Lemma'nın bir uygulamasıdır. Σ ile A içindeki tüm $I \neq A$ ideallerinin kümesini düşünelim. Σ kümesi üzerine kapsama sıralamasını koyalım. Bu durumda Σ içindeki her (I_α) idealler zincirinin bir üst sınırı olduğunu göstermeliyiz. O halde, her α, β için ya $I_\alpha \subseteq I_\beta$ yada $I_\beta \subset I_\alpha$ olur. Bu durumda $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$ istenilen üst sınırdır. Bu kanıtı bitirir.

Sonuç 1.4. A içindeki her $I \neq (1)$ ideali için I'yı içeren bir maksimal ideal vardır.

Kanıt: 1) Yukarıdaki kanıt bu duruma uyarlanabilir, yada

2) A/I halkasının maksimal idealinin $A \to A/I$ homomorfizması altındaki ters görüntüsü istenilen maksimal ideal olur.

Sonuç 1.5. Eğer $x \in A$ birim eleman değilse bir maximal idealin içinde kalır.
Kanıt: $I = (x)$ alalım. Sonuç 1.4. kanıtı bitirir.

Uyarı 1) A Noetheryen bir halka ise (Bölüm 7) Zorn Lemma'yı kullanmaya gerek kalmaz.

2) Sadece bir maksimal ideali olan halkalar vardır. Böyle halkalara Yerel Halka (Local Ring) denir. Eğer (A, m) bir yerel halka ise A/m cismine kalanlar cismi (residue field) denir.

Önerme 3.6.: i) A bir halka ve $m \neq (1)$, her $x \in A \setminus m$ elemanının birim eleman olduğu bir ideal olsun. Bu durumda, A yerel bir halkadır ve m ideali maksimaldir.

ii) A bir halka ve $m \subseteq A$ bir maksimal ideal olsun. Eğer $1+m = \{1+x \mid x \in m\}$ kümesinin her elemanı birim eleman ise A bir yerel halkadır.

Kanıt: i) Her $I \neq (1)$ ideali birim olmayan elemanlardan oluşur ve dolayısıyla da $I \subseteq m$ olmalıdır. O halde, m bir maksimal idealdir. Her maksimal idealde m'nin içinde kaldığına göre m A'nın tek maximal idealidir.

ii) Herhangi bir $x \in A \setminus m$ eleman alalım. m ideali maksimal olduğu için $m + (x) = \{y + kx \mid y \in m, k \in A\} = A$ olmalıdır. O halde $y + kx = 1$ olacak şekilde bir $y \in m$ ve $k \in A$ elemanı vardır. Şimdi, $kx = 1 - y \in 1+m$ bir birim eleman olmalıdır. Bu durumda x de birim eleman olur ve (i) şıkkından dolayı kanıt biter.

Sadece sonlu tane maksimal ideali olan bir halkaya yarı yerel halka denir.

Örnekler: 1) k bir cisim ve $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. Bu durumda her indirgenemez $f \in A$ polinomu için (f) esas ideali asaldır, çünkü A halkası bir UFD'dir.

2) $A = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda her ideal $I = (m)$ esas idealdir. Ayrıca bu idealin asal olması $m \in \mathbb{Z}$ sayısının asal olmasına denktir. Son olarak her asal ideal (m) aslında maksimaldir. $A/I = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ cismi m elemanlı cisimdir. Benzer şeyler $A = k[x]$ için de doğrudur.

Nilradical and Jacobson Radical

Önerme 1.7.: Bir A halkası içindeki tüm nilpotent elemanların kümesi, $\mathfrak{N}$, bir idealdir ve $A/\mathfrak{N}$ bölüm halkasının nilpotent elemanı yoktur.

Kanıt: $x, y \in \mathfrak{N}$ olsun. Eğer $x^n = 0 = y^m$, $m, n \in \mathbb{N}$ ise

$$(x+y)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^k y^{m+n-1-k}$$ olacağı için

ya $k \geq n$ yada $m+n-1-k \geq m$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x^k y^{m+n-1-k} = 0$ ve $(x+y)^{m+n-1} = 0$ elde edilir. Ayrıca, her $a \in A$ için $(ax)^n = a^n x^n = 0$ olacağı için $\mathfrak{N}$ bir idealdir.

İkinci ifade için bir $x \in A$ elemanı tarafından temsil edilen bir $\bar{x} = x + \mathfrak{N}$ elemanı alalım, öyle ki bir $k \geq 1$ tam sayısı için $\bar{x}^k = 0$ olsun.

$$\bar{x}^k = \overline{(x^k)} = 0 \in A/\mathfrak{N} \Rightarrow x^k \in \mathfrak{N}.$$ O halde, öyle

bir $m \geq 1$ tamsayısı vardır ki $(x^k)^m = 0$ olur. Dolayısıyla,

$x^{km} = 0 \Rightarrow x \in \mathfrak{N}$ ve dolayısıyla $\bar{x} = 0 \in A/\mathfrak{N}$ elde edilir. Başka bir deyişle $A/\mathfrak{N}$ halkasının sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur. ∎

Önerme 1.8.: Nilradical tüm asal ideallerin kesişimidir.

Kanıt: $x \in \mathfrak{N}$ ve bir $\mathfrak{p} \subseteq A$ asal ideali alalım.

$x^n = 0$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tam sayısı olduğu için $0 = x \cdot x^{n-1} \in \mathfrak{p}$ yazarak $x \in \mathfrak{p}$ veya $x^{n-1} \in \mathfrak{p}$ elde ederiz. Tümevarım kullanarak sonunda $x \in \mathfrak{p}$ elde edilir. O halde, x her asal idealin içindedir.

Şimdi de tersine bir nilpotent olmayan bir $x \in A$ elemanı alalım. Σ ile "$n > 0 \Rightarrow f^n \notin I$" koşulunu sağlayan tüm ideallerin kümesini gösterelim. $0 \in \Sigma$ olduğu için Σ boş değildir. Bu kümenin de kapsama bağıntısına göre sıralandığını düşünürsek Zorn's Lemma yardımıyla Σ kümesinin bir maksimal elemanı olduğunu görürüz. Diyelim ki, $p \in \Sigma$ böyle bir maksimal eleman olsun.

<u>İddia:</u> p asal bir idealdir.

<u>Kanıt:</u> $x, y \in A$ ve $xy \in p$ olsun. $x \notin p$ ve $y \notin p$ olduğunu kabul edelim. $(x)+p$ ve $(y)+p$ idealleri p'den kesinlikle büyük olduğu için Σ içinde değildirler. Başka bir deyişle

$f^n \in (x)+p$ ve $f^m \in (y)+p$ olacak şekilde $m, n \geq 1$

vardır. Buradan, $f^{m+n} \in p+(xy)$ ve dolayısıyla $p+(xy) \notin \Sigma$ elde edilir. $p \in \Sigma$ olduğu için $xy \notin p$ çelişkisine ulaşırız. Başka bir deyişle p asal bir idealdir.

O halde, $f \notin p$ olacak şekilde bir asal idealin varlığını gösterdik. Başka bir deyişle f elemanı tüm asal ideallerin arakesitinde değildir. Böylece kanıt tamamlanır.

Benzer şekilde Jacobson radikal şu şekilde karakterize edilebilir:

<u>Önerme 1.9.:</u> $\mathfrak{R}$ ile A halkasının Jacobson radikalini gösterirsek, $x \in \mathfrak{R} \iff 1-xy$ ifadesi her $y \in A$ için bir birim elemandır.

<u>Kanıt:</u> $x \in \mathfrak{R}$ olsun. O halde, her $y \in A$ için xy her maksimal idealin içindedir. Bu durumda, $1-xy$ hiçbir maksimal idealin içinde değildir. Bu ise $1-xy$ elemanının birim eleman olması durumunda mümkündür.
Şimdi de $x \notin \mathfrak{R}$ alalım. O halde, $x \notin m$ olacak şekilde bir maksimal ideal vardır. Bu durumda $(x)+m = (1) = A$ olacağı için $xy+u=1$ olacak şekilde $y \in A$ ve $u \in m$ elemanları vardır. Son olarak $1-xy = u \in m$ olduğu için birim eleman olamaz.

İdealler Üzerinde İşlemler: $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bir A halkası içindeki ideallerin bir ailesi ise

$\sum_\alpha I_\alpha$ ideali şu şekilde tanımlanır:

$$\sum_\alpha I_\alpha = \{ x_{\alpha_{i_1}}+\cdots+x_{\alpha_{i_n}} \mid n\in\mathbb{N},\ x_{\alpha_{i_k}} \in I_{\alpha_{i_k}},\ k=1,\ldots,n\}$$

Eğer Λ ailesi sonlu ise $I_1\cdots I_n$ ideali de

$I_1\cdots I_n = \{x_1\cdots x_n \mid x_i\in I_i,\ i=1,\ldots,n\}$ ile tanımlanır.

Özel durum olarak $I^n=\{x_1\cdots x_n \mid x_i\in I\}$ olur.

Herhangi bir $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ideal ailesi için $\bigcap_\alpha I_\alpha$ arakesiti de bir idealdir.

Örnekler: 1) $A=\mathbb{Z}$, $I=(m)$, $J=(n)$ olsun. O halde,

$I+J=(d)$, $d=(m,n)$ ve $IJ=(mn)$ olur.

Ayrıca, $IJ=I\cap J \Leftrightarrow (m,n)=1$'dir.

2) $A=k[x_1,\ldots,x_n]$, $I=(x_1,\ldots,x_n)$ ideali olsun. Bu durumda I^d derecesi en az d olan monomiyallerin oluşturduğu polinomlar ideali olur.

Aşağıdaki özellikler kolayca kanıtlanabilir:

$I(J+K)=IJ+IK$

$I\cap(J+K)=I\cap J+I\cap J$, eğer $J\subseteq I$ veya $K\subseteq I$ ise.

Ayrıca, eğer $I+J=(1)=A$ ise $I\cap J=IJ$ olur
($IJ\subseteq I\cap J$ her zaman doğrudur!)

I ve J gibi iki ideale aralarında asal (veya maksimal) denir eğer $I+J=(1)=A$

$A_1,\ldots,A_n$ halkalar olmak üzere $A=A_1\times\cdots\times A_n$ olsun.

$p_i : A \to A_i$, $p_i(x) = x_i$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ile tanımlanan projeksiyon olsun.

Şimdi de bir A halkasının $I_1, \dots, I_n$ gibi ideallerini alalım.

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^{n} A/I_i, \quad \phi(x) = (x+I_1, \dots, x+I_n),$$ homomorfizmasını düşünelim.

Önerme 1.10: i) Eğer her $i \neq j$ için I_i ve I_j aralarında asal ise $\prod a_i = \bigcap a_i$ olur.

ii) ϕ örtendir $\Longleftrightarrow$ Her $i \neq j$ için I_i ve I_j aralarında asal ise.

iii) ϕ birebirdir $\Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} a_i = (0)$.

Kanıt: i) n üzerine tümevarım yapalım. $n=1$ durumu açıktır. $n>1$ alalım ve sonucun $1, 2, \dots, n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O halde,

$$I = \prod_{i=1}^{n-1} I_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} I_i$$ olur. $i = 1, \dots, n-1$ için $I_i + I_n = (1)$

olduğu için $x_i + y_i = 1$ olacak şekilde $x_i \in I_i$ ve $y_i \in I_n$ vardır. Buradan

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} (1-y_i) \equiv 1 \pmod{I_n}$$ elde ederiz.

Dolayısıyla, $I + I_n = (1)$ olur ve buradan da

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = I I_n = I \cap I_n = \bigcap_{i=1}^{n} I_n$$ elde edilir.

ii) $(\Longrightarrow)$ Φ örten olduğu için $\Phi(x) = (1, 0, \dots, 0)$ olacak şekilde bir $x \in A$ elemanı vardır. O halde, $x \equiv 1 \pmod{I_1}$ ve $x \equiv 0 \pmod{I_2}$ olur.

$1 = (1-x) + x \in I_1 + I_2$ olduğundan $I_1 + I_2 = (1)$ olur.

Benzer şekilde, her $i \neq j$ için $I_i + I_j = (1)$ dir.

$(\Longleftarrow)$ $\Phi(x) = (1, 0, \dots, 0)$ olacak şekilde bir $x \in A$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $I_1 + I_n = (1)$ olduğu için

$u_i + v_i = 1$, $u_i \in I_1$ ve $v_i \in I_i$ gibi elemanlar vardır.

$x = \prod_{i=2}^{n} v_i = \prod_{i=2}^{n} (1-u_i) \equiv 1 \pmod{I_1}$ ve $x \equiv 0 \pmod{I_i}$ $(i>1)$

olduğu için $\Phi(x) = (1,0,\ldots,0)$ olur ve kanıt biter.

iii) $\ker \Phi$'nin $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ olduğu açıktır.

<u>Önerme 1.11:</u> i) $P_1,\ldots,P_n$ asal idealler olmak üzere $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ olsun. Bu durumda $I \subseteq P_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1,\ldots,n\}$ vardır.

ii) P asal olmak üzere $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$ olacak şekilde $I_1,\ldots,I_n$ ve P idealleri verilsin. Bu durumda $I_i \subseteq P$ olacak şekilde bir i vardır. Eğer $\bigcap_i I_i = P$ ise $I_i = P$ olur.

<u>Kanıt:</u> Tümevarım ile aşağıdaki ifadeyi kanıtlamak yeterli olacaktır:

$I \nsubseteq P_i$, $i=1,\ldots,n$ ise $I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ olur.

$n=1$ durumu açıktır. Şimdi sonucun $n-1$ için doğru olduğunu düşünelim ve $I \nsubseteq P_i$, $i=1,\ldots,n$, alalım. Bu durumda her i için bir $x_i \in I$ elemanı vardır öyle ki her $j \neq i$ için $x_i \notin P_j$ olur.

Dolayısıyla, eğer bir i için $x_i \notin P_i$ ise kanıt biter. O halde, her i için $x_i \in P_i$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, $y = \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n$ elemanını düşünelim.

$y \in I$ ve $y \notin P_i$ $(i=1,\ldots,n)$ olur. Dolayısıyla $I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

ii) Şimdi de her i için $I_i \nsubseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_i \in I_i$ ve $x_i \notin P$ olacak şekilde elemanlar vardır. O halde, $\prod x_i \in \bigcap I_i$ ve $\prod x_i \notin P$ olur. Dolayısıyla, $\bigcap I_i \nsubseteq P$ elde edilir. Son olarak, eğer $P = \bigcap I_i$ ise $I_i \subseteq P$ olacak şekilde bir I_i vardır. Bu ise $P = I_i$ demektir. ∎

I ve J A halkasının idealleri olsun. Bunların bölüm ideali

$$(I:J)=\{x\in A \mid xJ\subseteq I\}$$ ile tanımlanan idealdir.

$(0:J)$ idealine J'nin annihilatorı denir ve ayrıca $\mathrm{Ann}(J)$ ile de gösterilir.

Bu gösterimi kullanırsak $D=\bigcap_{x\neq 0}\mathrm{Ann}(x)$ alt kümesi A halkasının sıfır bölenlerinin kümesi olur.

E $J=(x)$ esas ideal ise $(I:(x))$ yerine sadece $(I:x)$ yazarız.

__Örnek:__ $A=\mathbb{Z}$, $I=(m)$ ve $J=(n)$ olsun. Eğer $m=\prod_p p^{\mu_p}$ ve $n=\prod_p p^{\nu_p}$ asal çarpımları ise

$$(m:n)=(q),\quad q=\prod_p p^{\gamma_p},\quad \gamma_p=\max(\mu_p-\nu_p,0)$$
$$=\mu_p-\min(\mu_p,\nu_p).$$

__Alıştırma 1.12__ i) $I\subset(I:J)$
ii) $(I:J)J\subseteq I$
iii) $((I:J)):K)=(I:JK)=((I:K):J)$
iv) $(\bigcap_i I_i:J)=\bigcap_i(I_i:J)$
v) $(I:\sum_i J_i)=\bigcap_i(I:J_i)$.

$I\subseteq A$ ideal olmak üzere, I'nın radikali

$$r(A)=\{x\in A \mid x^n\in I,\ \text{bazı } n>0 \text{ için}\}$$ ile tanımlanır.

Eğer $\Phi: A\to A/I$ standard bölüm homomorfizması ise

$$r(I)=\Phi^{-1}(\mathfrak{N}_{A/I})$$ olur ve dolayısıyla $r(I)$ bir idealdir.

__Alıştırma 1.13.__ i) $r(I)\supseteq I$
ii) $r(r(I))=r(I)$
iii) $r(IJ)=r(I\cap J)=r(I)\cap r(J)$

iv) $r(I) = (1) \Leftrightarrow I = (1)$

v) $r(I+J) = r(r(I) + r(J))$

vi) Eğer p asal ise her $n>0$ için $r(p^n) = p$ olur.

Önerme 1.14. Bir I idealinin radikali o ideali içeren tüm asal ideallerin arakesiti olur.

Kanıt: Önerme 1.8'i A/I halkasına uygularsak kanıt tamamlanır. ∎

Herhangi bir $E \subseteq A$ kümesi için de $r(E)$ tanımlanabilir. Bu durumda $r(E)$ bir ideal olmayabilir. Yine de

$$r\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right) = \bigcup_\alpha r(E_\alpha)$$ sağlanır.

Önerme 1.15: $D = A$'nın tüm sıfır bölenlerinin kümesi
$$= \bigcup_{x\neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)).$$

Kanıt: $D = r(D) = r\left(\bigcup_{x\neq 0} \mathrm{Ann}(x)\right) = \bigcup_{x\neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)).$ ∎

Örnek: $A = \mathbb{Z}$, $I = (m)$ ve $p_1, \ldots, p_r$ m'nin farklı çarpanları olsunlar. O zaman
$$r(I) = (p_1 \cdots p_r) = \bigcap_{i=1} (p_i) \text{ olur.}$$

Önerme 1.18.: I ve J A'nın idealleri olmak üzere, eğer $r(I)$ ve $r(J)$ aralarında asal ise I ve J de aralarında asal olur.

Genişleme ve Büzmeler:

$f: A \to B$ halka homomorfizması olsun. $I \subseteq A$ içinde bir ideal olmak üzere $f(I)$ kümesini içeren en küçük ideale I'nin genişlemesi denir ve I^e ile gösterilir:
$$I^e = Bf(I).$$

Diğer yandan $J \subseteq B$ içinde bir ideal ise $f^{-1}(J)$ A'nın bir idealidir ve J'nin büzmesi olarak adlandırılır.

Örnek: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$, $i=\sqrt{-1}$, $f(n)=n$, $n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$f(2) = (1+i)(1-i)$ olduğu için $f((2))$ ideali asal değildir. Dolayısıyla, asal bir idealin genişlemesi asal olmayabilir. Diğer yandan, $\mathbb{Z}[i]$ bir esas ideal bölgesidir (çünkü Öklit Algoritması vardır). Ayrıca

i) $(2)^e = (1+i)^2$, bir asal idealin karesi.

ii) Eğer $p \equiv 1 \pmod 4$ ise $(p)^e$ iki farklı esas idealin çarpımı olur: $(5)^e = (2+i)(2-i)$

iii) Eğer $p \equiv 3 \pmod 4$ ise $(p)^e$ $\mathbb{Z}[i]$ içinde asaldır.

Önerme 1.17.: $f: A \to B$, $I \subseteq A$, $J \subseteq B$ ideal olsunlar.

i) $I \subseteq I^{ec}$, $J^{ce} \subseteq J$.
ii) $J^c = J^{cec}$ ve $I^e = I^{ece}$

iii) Eğer C A içindeki tüm büzme idealler ve E de B içindeki tüm genişleme idealler kümeleri ise
$I \mapsto I^e$ ve $J \mapsto J^c$ C ve E kümeleri arasında birbirinin tersi olan eşleme verirler.

Kanıt: Alıştırma olarak bırakılmıştır.

Alıştırma 1.18.: I_1, I_2 A içinde ve J_1, J_2 B içinde idealler olsunlar. Bu durumda

$(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$, $(J_1+J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$,
$(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$, $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$,
$(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$, $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$
$(I_1 : I_2)^e \subseteq (I_1^e : I_2^e)$, $(J_1 : J_2)^c \subseteq (J_1^c : J_2^c)$
$r(I)^e \subseteq r(I^e)$, $r(J)^c = r(J^c)$.

E toplama ve çarpma altında, C ise diğer üç işlem altında da kapalıdır.

2. Bölüm: Modüller:

Modül ve Modül Homomorfizmaları:

A bir halka ve M, A'nın üzerinde doğrusal olarak etki ettiği bir değişmeli grup olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa M'ye bir A-modüldür denir:

Her $a, b \in A$ ve $x, y \in M$ için

i) $a(x+y) = ax + ay$
ii) $(a+b)x = ax + bx$
iii) $(ab)x = a(bx)$
iv) $1x = x$.

Uyarı: Yukarıdaki tanım, E(M), M değişmeli grubunun endomorfizmalarının halkası olmak üzere, A'dan E(M)'ye bir $A \to E(M)$ halka homomorfizması ile de verilebilir.

$\varphi : A \to E(M)$ halka homomorfizması ise $a \in A$ ve $x \in M$ için

$$a \cdot x \doteq \varphi(a)(x)$$ ile tanımlanır.

Örnekler: 1) $I \leq A$ bir ideal ise I doğal olarak bir A-modüldür.

$$A \times I \to I, \quad (a,x) \mapsto ax.$$

2) Eğer A bir cisim ise her A-modül bir A-vektör uzayıdır.

3) $A = \mathbb{Z}$ ise her değişmeli grup bir A-modüle yapısına sahiptir:

$$\mathbb{Z} \times M \to M, \quad (n,x) \mapsto n \cdot x \doteq \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-times}}$$

4) $A = k[x]$ ve k bir cisim ise, her A-modül k-üzerinde bir vektör uzayıdır ve x ile çarpmak bir k-vektör uzayı homomorfizmasıdır.

5) G-sonlu grup ve $A = k[G]$ grup cebiri ise her A-modül G'nin bir k-temsilidir.

M ve N A-modüller olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan A-doğrusal homomorfizmalara A-modül homomorfizması denir:

$$f: M \to N, \quad f(ax) = af(x) \text{ ve } f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$a \in A$, $x, y \in M$.

Homomorfizmaların bileşkesi de bir homomorfizmadır. Tüm homomorfizmaların kümesi $Hom_A(M,N)$ de doğal olarak bir modüldür.

Alt modüller ve Bölüm Modülleri:

M bir A-modül ve $M' \subseteq M$ bir alt grup olsun. Eğer M' de bir A-modül ise (aynı işlemler altında) M' modülüne M'nin bir A-alt modülü denir.

Bu durumda M/M' bölüm grubu da bir A-modül yapısına sahiptir öyle ki $M \to M/M'$ bölüm homomorfizması da bir A-modül homomorfizması olur:

$$M \to M/M', \quad x \mapsto x + M', \quad x \in M.$$

Eğer $f: M \to N$ bir A-modül homomorfizması ise $\ker(f)$ M içinde, $Im(f)$ ise N içinde alt modüllerdir.

Ayrıca, $coker(f) = N/Im(f)$ ile tanımlanan A-modüldür.

Verilen bir $f: M \to N$ homomorfizması için

$M/\ker(f) \to Im(f)$, $x + \ker(f) \mapsto f(x)$, $x \in M$, bir A-modül homomorfizmasıdır.

Alt modüller Üzerinde İşlemler:

M bir A-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ bir alt modül ailesi olsun.

1) Bu ailenin toplamı

$$\sum M_i \doteq \{ x_{i_1}+\dots+x_{i_k} \mid x_{i_r}\in M_{i_r},\ r=1,\dots,k\}$$ ile

tanımlanan küme bir A-alt modüldür.

2) Bu ailenin arakesiti

$$\bigcap M_i = \{x \mid x\in \bigcap M_i,\ \forall i\in I\}$$ yine bir A-alt modüldür.

Önerme 2.1.: 1) $L\supseteq M\supseteq N$ A-modüller olmak üzere

$$(L/N)/(M/N)\cong L/M.$$

2) $M_i\subseteq M$, $i=1,2$, A-alt modüller olmak üzere

$$(M_1+M_2)/M_1 \cong M_2/_{M_1\cap M_2}$$ olur.

Kanıt: Alıştırma olarak bırakılmıştır. ■

- $I\subseteq A$ bir ideal ve M A-modül ise

$$IM=\{a\cdot x \mid a\in I,\ x\in M\}$$ bir alt modüldür.

- N ve P M içinde alt modüller ise

$$(N:P)\doteq\{a\in A \mid aP\subseteq N\}$$ A içinde bir idealdir.

$(0:M)$ idealine M'nin annihilatoru denir ve $\mathrm{Ann}(M)$ ile gösterilir. Eğer $I\subseteq \mathrm{Ann}(M)$ ise M bir A/I-modül olarak da görülebilir. Eğer $\mathrm{Ann}(M)=0$ ise M'ye sadık A-modül denir.

Alıştırma 2.2 i) $\mathrm{Ann}(M+N)=\mathrm{Ann}(M)\cap \mathrm{Ann}(N)$.

ii) $(N:P)=\mathrm{Ann}((N+P)/N)$.

Direkt Toplam ve Çarpım:

M ve N A-modüller olmak üzere $M \oplus N$ direkt toplamı (x,y), $x \in M$, $y \in N$ ikililerin oluşturduğu ve aşağıda tanımlanan işlemlere sahip olan A-modüldür.

$$M \oplus N = \{(x,y) \mid x \in M,\ y \in N\}$$

$$a.(x,y) \doteq (ax, ay), \quad a \in A, \quad (x,y) \in M \oplus N.$$

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) \doteq (x_1+x_2, y_1+y_2), \quad (x_i,y_i) \in M \oplus N, \ i=1,2.$$

Daha genel olarak verilen her $\{M_i\}_{i \in I}$ A-modül ailesi için $\bigoplus M_i = \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \mid x_{i_r} \in M_{i_r}, r = 1, \dots, k\}$ direkt toplamı tanımlanır.

$\prod M_i \doteq \{(x_i) \mid x_i \in M_i, \forall i \in I\}$ ise $\{M_i\}$ ailesinin direkt çarpımı olarak adlandırılır.

I ailesi sonlu ise, $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, $\bigoplus_{i \in I} M_i \simeq \prod_{i \in I} M_i$

Örnek: Bir A-halkasının $\prod_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in A$, halkaların direkt çarpımına izomorfik kabulün.

$I_i \doteq \{(0, \dots, a_i, \dots, 0) \in A \mid a_i \in A_i\}$ kümesi A içinde bir idealdir. Bu durumda A-modül olarak

$A \cong \bigoplus I_i$, olur. Diğer yandan, eğer $A \cong I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ modül ayrışımı ise $J_r = \bigoplus_{j \neq r} I_r$ olmak üzere

$A \cong \prod_{r=1}^{n} (A/J_r)$ olur.

Sonlu Üretilen Modüller: Eğer bir modül

$M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$, $M_i \cong A$, $i \in I$, ise M'ye serbest A-modüldür denir.

Önerme 2.3.: Verilen bir M A-modülünün sonlu üretilen olması, M'nin A^n serbest modülünün bölümü olmasına denktir.

Kanıt alıştırma olarak bırakılmıştır.

Önerme 2.4.: M sonlu üreteçli bir A-modül ve $\phi: M \to M$ bir modül endomorfizması olsun öyle ki $\phi(M) \subseteq IM$ olacak şekilde bir $I \subseteq A$ ideali olsun. Bu durumda ϕ aşağıdaki şekilde bir eşitliği sağlar:

$$\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_1, \dots, a_n \in I.$$

Kanıt: $x_1, \dots, x_n$ M modülünün sonlu bir üreteç kümesi olsun. Her $i = 1, \dots, n$, için $\phi(x_i) \in IM$ olduğu için

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$ olacak şekilde $a_{ij} \in A$ vardır.

O halde, $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} \phi - a_{ij}) x_j = 0$ yazabiliriz. Bunu bir denklemi gibi yazalım: $b_{ij} = \delta_{ij}\phi - a_{ij}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Burada $b_{ij} \in R = End_A(M)$ halkasının içinde A ve ϕ tarafından üretilen değişmeli S halkasının üzerinde bir matris olarak görebiliriz: $S = \langle A, \phi \rangle$. Bu durumda (b_{ij}) matrisinin adjoint matrisinden ve determinantından da bahsede biliriz: $B = (b_{ij})$, $adj(B)$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $adj(B)$ matrisi ile çarparsak

$adj(B)\, B\, X = adj(B) \cdot 0 = 0 \Rightarrow det(B)\, Id \cdot X = 0$, elde ederiz. Burada Id birim matristir.

O halde, her $j = 1, \dots, n$, için $det(B)\, x_j = 0$ olur. Başka bir değişle $det(B)$ sıfır endomorfizmasıdır. $det(B) = det(\delta_{ij}\phi - a_{ij})$ matrisinin açılımını yazarsak kanıt tamamlanır.

Sonuç 2.5.: M sonlu üretilen bir A-modül ve $I \subseteq M$ $IM = M$ koşulunu sağlayan bir ideal olsun. Bu durumda, $x \equiv 1 \pmod{I}$ koşulunu sağlayan bir eleman vardır öyle ki $xM = 0$ olur.

Kanıt: $\phi = Id : M \to M$ birim dönüşüm olsun. Bir önceki önermeden dolayı bazı $a_1, \dots, a_n \in I$ için

$$\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n = 0$$ olur. $x = 1 + a_1 + \dots + a_n$ alalım.

Şimdi her $m \in M$ için $(\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \dots + a_n)(m) = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n)(m) \\ &= (Id + a_1 Id + \dots + a_n Id)(m) \\ &= (1 + a_1 + \dots + a_n)\, Id(m) \\ &= x \cdot m \end{aligned}$$ elde edilir. ∎

Önerme 2.6.: (Nakayama Lemma)

M sonlu üretilen bir A-modül ve I A'nın Jacobson radikalinde kalan bir ideal olsun. Eğer, $IM = M$ ise $M = 0$ olur.

Kanıt. Sonuç 2.5.'den dolayı $x \equiv 1 \pmod{R}$ olacak şekilde bir eleman için $xM = 0$ olur. Diğer yandan, Önerme 1.9.'dan dolayı $x \in A$ birim elemandır. Dolayısıyla,

$$M = 1 \cdot M = x^{-1} x M = x^{-1} 0 = 0$$ elde edilir. ∎

Sonuç 2.7: M sonlu üretilen bir A-modül ve $I \subseteq R$ Jacobson radikal içinde bir ideal olsun. Eğer bir $N \subseteq M$ alt modül için $M = IM + N$ oluyorsa $M = N$ olmalıdır.

Kanıt: $I(M/N) = (IM + N)/N = M/N$ olur. O halde, Nakayama Lemma'dan dolayı $M/N = 0$ elde edilir. Bu ise $M = N$ demektir. ∎

Şimdi A maksimal ideali m olan bir yerel halka ve $k = A/m$ kalan cismi olsun. M sonlu üretilen bir A-modül M/mM bölüm modülü m tarafından annihilate edilebileceği için, $m(M/mM) = 0$, M/mM bölüm modülünü $k = A/mM$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olarak görebiliriz.

Bu durumda aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 2.8.: $x_1, \dots, x_n$ M içinde M/mM k-vektör uzayının bazını teşkil eden elemanlar olsunlar. Bu durumda $x_1, \dots, x_n$ M modülünün bir üreteç kümesidir.

Kanıt: $N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, x_i'ler tarafından üretilen alt modül olsun. O halde,

$$N \to M \to M/mM \quad \text{bileşke homomorfizması}$$

örtendir. Dolayısı ile $N + mM = M$ olmalıdır: Gerçekten de, eğer $m \in M$ ise öyle bir $n \in N$ vardır ki $m \equiv n \pmod{mM}$ olur. O halde, $m - n = am'$ olacak şekilde $a \in m$ ve $m' \in M$ vardır. $m = n + am'$ yazarsak $m \in N + mM$ olduğunu görürüz. O halde,

$$M \subseteq N + mM \subseteq M \Rightarrow M = N + mM \text{ elde edilir.}$$

Son olarak, bir önceki sonuç kanıtı tamamlar.

Tam Diziler:

Bir $\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots$ A-modül ve modül homomorfizmaları dizisi bir i için $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ koşulunu sağlıyorsa bu diziye M_i'de tam denir. Eğer dizi her M_i'de tam ise diziye kısaca tam dizi denir.

Örnekler: 1) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ dizisi tamdır ancak ve ancak f birebir ise.

2) $M' \xrightarrow{f} M \to 0$ dizisi tamdır ancak ve ancak f örten ise.

3) $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ dizisi tamdır ancak ve ancak f birebir, g örten ve $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ ise. Bu diziye kısa tam dizi denir.

Önerme 2.9.: i) Verilen bir $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul her N A-modülü için

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M', N)$$ dizisinin tam olmasıdır.

ii) Verilen bir $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul her M A-modülü için

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M, N'')$$ dizisinin tam olmasıdır.

Kanıt: Sadece ikinci iddianın ($\Leftarrow$) yönünü kanıtlayacağız. Geri kalanı benzer olduğu için alıştırma olarak bırakılmıştır.

i) $u : N' \to N$ birebirdir. $M = \ker(u)$ seçelim. Bu durumda

$$0 \to \mathrm{Hom}(\ker(u), N') \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(\ker(u), N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(\ker(u), N'')$$
$$(f : \ker(u) \to N') \mapsto (u \circ f : \ker(u) \to N)$$

homomorfizması tam olduğu için $f = i$ içerme fonksiyonunu alırsak $u \circ f = u : \ker(u) \to N$ sıfır homomorfizması olur.

Fakat Hom dizisi tam olduğu için $i : ker(u) \to N'$ sıfır homomorfizması olmalıdır. i içerme fonksiyonu olduğu için, i'nin sıfır olması ancak $ker(u) = 0$ durumunda gerçekleşir. Dolayısıyla, $u: N' \to N$ birebirdir.

ii) $Im(u) = ker(v)$. $M = N'$ ve $f = u : N' \to N$ alalım.

$$0 \to Hom(N', N') \xrightarrow{\bar{u}} Hom(N', N) \xrightarrow{\bar{v}} Hom(N', N'')$$
$$(id : N' \to N') \longmapsto (u : N' \to N) \longmapsto 0$$

$\bar{u}(id : N' \to N') = u \circ id = u : N' \to N$ olduğu için

$\bar{v}(u(N' \to N)) = 0 \in Hom(N', N'')$ olmalıdır.

Fakat bu son homomorfizma $v \circ u : N' \to N''$ olduğu için $v \circ u = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $Im(u) \subseteq ker(v)$ olmalıdır.

Şimdi de $ker(v) \subseteq Im(u)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $M = ker(v)$ ve $f = i : M \to N$ içerme fonksiyonu alalım.

$\bar{v}(i : M \to N) = v : ker(v) \to N''$ sıfır fonksiyonu olacaktır. O halde, bir $j : ker(v) \to N'$ homomorfizması için
$\bar{u}(j : ker(v) \to N') = (i : ker(v) \to N)$ olmalıdır.

$\Rightarrow u \circ j = i : ker(v) \to N$ olur. O halde,

$ker(v) = Im(i) = Im(u \circ j) \subseteq Im(u)$ elde edilir.

O halde, $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ dizisi tamdır.

<u>Önerme 2.10.</u>:
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \to & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \to & 0 \end{array}$$
tam dizilerin değişmeli bir şekli olsun. Bu durumda aşağıdaki gibi bir tam dizi vardır.

$$0 \to \ker(f') \xrightarrow{\bar{u}} \ker(f) \xrightarrow{\bar{v}} \ker(f'') \xrightarrow{d} \operatorname{Coker}(f') \to \operatorname{Coker}(f) \xrightarrow{\bar{u}'} \operatorname{Coker}(f'') \xrightarrow{\bar{v}'} 0.$$

$d : \ker(f'') \to \operatorname{Coker}(f')$ homomorfizmasına sınır homomorfizması denir ve aşağıdaki şekil yardımıyla tanımlanır:

$$y \longmapsto x$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$z \longmapsto f(y) \longmapsto 0$$

$x \in \ker(f'')$ alalım. $v : M \to M''$ örten olduğu için bir $y \in M$ için $x = v(y)$ olur. Şekil değişmeli olduğu için

$0 = f''(x) = f''(v(y)) = v'(f(y))$ olur ve dolayısıyla,

$f(y) \in \ker(v')$ dır. Son olarak $\ker(v') = \operatorname{Im}(u')$ olduğu için $u'(z) = f(y)$ olacak şekilde bir $z \in N'$ vardır.

Şimdi, $d(x) \doteq \varphi(z)$, $\varphi : N' \to N'/\operatorname{Im} f' = \operatorname{Coker} f'$

olarak tanımlanır.

Kanıt yukarıdaki argümanların benzerlerinden oluşmaktadır ve alıştırma olarak bırakılmıştır.

C A-modüllerin bir sınıfı ve $\lambda : C \to \mathbb{Z}$ bir fonksiyon olsun ($\mathbb{Z}$ yerine herhangi bir G değişmeli grubu da alabiliriz). Eğer λ fonksiyonu her

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ dizisi için

$\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$ koşulunu sağlıyorsa λ fonksiyonuna toplamsaldır denir.

<u>Örnek:</u> $A = k$ bir cisim ise $\lambda(M) = \dim_k M$ toplamsal bir fonksiyondur.

Önerme 2.11.: Eğer $0 \to M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \to M_n \xrightarrow{f_n} 0$ bir tam dizi ve λ bir toplamsal fonksiyon ise

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0$$ olur.

Kanıt: Bu diziyi $0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$ şeklinde $n+1$ tane kısa tam diziye parçalayalım!

$$0 \to N_0 = 0 \to M_0 \to N_1 = \mathrm{Im} f_0 \to 0$$

$$0 \to M_0 \xrightarrow{\cong} N_1 \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Im}(f_0) \to M_1 \to \mathrm{Im}(f_1) = \ker(f_2) \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to \mathrm{Im}(f_{i-1}) \to M_i \to \mathrm{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1}) \to 0$$

Dolayısıyla, $\lambda(M_0) = \lambda(\mathrm{Im} f_0) = \lambda(\ker(f_1))$

$$\lambda(M_1) = \lambda(\mathrm{Im}(f_0)) + \lambda(\mathrm{Im}(f_1))$$

$$\lambda(M_2) = \lambda(\mathrm{Im}(f_1)) + \lambda(\mathrm{Im}(f_2))$$

$$\vdots$$

$$\lambda(M_i) = \lambda(\mathrm{Im}(f_{i-1})) + \lambda(\mathrm{Im}(f_i))$$

$$\vdots$$

$$\lambda(M_n) = \lambda(\mathrm{Im} f_{n-1}).$$

O halde, $\lambda_0(M) - \lambda(M_1) + \lambda(M_2) - \cdots + (-1)^n \lambda(M_n)$

$$= \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_0)}) - \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_0)}) - \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_1)}) + \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_1)}) + \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_2)})$$
$$- \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_2)}) - \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_3)}) + \cdots + (-1)^{n-1} \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_{n-2})}) +$$
$$(-1)^{n-1} \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_{n-1})}) + (-1)^n \lambda(\cancel{\mathrm{Im}(f_{n-1})}) = 0$$ olur.

Modüllerin Tensör Çarpımı:

M, N ve P A-modül olsun. Eğer bir $f: M\times N \to P$ fonksiyonu, her $x_0 \in M$ ve $y_0 \in N$ için

$$f(x_0,\cdot): N \to P,\quad y \mapsto f(x_0,y) \text{ ve}$$

$$f(\cdot, y_0): M \to P,\quad x \mapsto f(x,y_0),$$ fonksiyonları A-modül homomorfizması oluyorsa, f'ye A-bilineer fonksiyon denir.

__Önerme 2.12.:__ M ve N A-modül olsunlar. Bu durumda öyle bir T A-modülü ve $g: M\times N \to T$ bilineer fonksiyonu vardır ki şu özellik sağlanır:
Verilen her P A-modülü ve $f: M\times N \to P$ bilineer fonksiyonu için tek bir $f': T \to P$ A-modül homomorfizması vardır öyle ki $f = f'\circ g$.
Ayrıca, (T,g) ikilisi de bu anlamda tektir.

__Kanıt:__ i) (P,f) ikilisini (T',g') olarak $g' = j\circ g$ olacak şekilde tek bir $j: T' \to T$ homomorfizması buluruz. Benzer şekilde bir $j': T \to T'$ vardır öyle ki $g = j'\circ g'$ olur. Buradan $g = (j'\circ j)\circ g$ elde ederiz. Son olarak $j'\circ j$ fonksiyonunun tekliğinden dolayı $j'\circ j = id_T$ elde edilir.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & T \\ T \arrow[ur, "j'\circ j"'] & \end{tikzcd}$$

Benzer şekilde $j\circ j' = id_{T'}$ olur.

Böylece (T,g) ikilisinin tekliği kanıtlanmış olur.

ii) T modülünün inşası şu şekilde yapılabilir: C $A^{M\times N}$ serbest A-modül olsun. Bu durumda C'nin elemanları

$\sum c_i(m_i,n_i)$ şeklinde formal sonlu toplamlar olacaktır. D bu modülün aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen alt modülü olsun:

$(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$, $(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$

$(ax,y)-a(x,y)$, $(x,ay)-a(x,y)$, $a\in A$, $x,x'\in M$
$y,y'\in N$.

Son olarak $T=C/D$ bölüm modülü olarak tanımlansın. (x,y) ikilisinin denklik sınıfı olan $(x,y)+D$ "coset" bundan böyle $x\otimes y$ ile gösterilecektir.

Dolayısıyla
$$(x+x')\otimes y = x\otimes y + x'\otimes y,$$
$$x\otimes(y+y') = x\otimes y + x\otimes y',$$
$$(ax)\otimes y = a(x\otimes y) \text{ ve } x\otimes(ay) = a(x\otimes y)$$
olur.

Kanıtın geri kalanı alıştırma olarak bırakılmıştır.

<u>Uyarı</u>: 1) M ve N sonlu üretilen A-modüller ise $M\otimes N$'de sonlu üretilir.

2) Eğer $A=K$ bir cisim ve M ve N sonlu boyutlu K-vektör uzayları ise $M\otimes N$ vektör uzayı da sonlu boyutludur ve $\dim M\otimes N = (\dim M)\cdot(\dim N)$ sağlanır. Aslında $\{e_1,\dots,e_m\}$ M ve $\{e_1',\dots,e_n'\}$ N için birer taban ise $\{e_i\otimes e_j'\}$ $M\otimes N$ için bir tabandır.

<u>Sonuç 2.13.</u>: $x_i\in M$, $y_i\in N$ olsun öyle ki $\sum x_i\otimes y_i=0$ olsun. Bu durumda sonlu üretilen birer $M'\subseteq M$ ve $N'\subseteq N$ alt modülleri için $\sum x_i\otimes y_i=0$ eşitliği $M'\otimes N'$ tensör çarpımı içinde de sağlanır.

<u>Kanıt</u>: $\sum x_i\otimes y_i=0\in M\otimes N$ olduğu için $\sum(x_i,y_i)\in D$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\sum(x_i,y_i)$ D alt modülünün üreteçlerinin sonlu bir toplamı olmalıdır.

Şimdi M_0 x_i'ler ve yukarıdaki sonlu sayıda D üretecinin ilk bileşeninin ürettiği alt modül olsun. N_0 da benzer şekilde tanımlansın. İstenen alt modül $M_0\otimes N_0$'dır.

Benzer şekilde sonlu $M_1\otimes M_2\otimes\cdots\otimes M_r$ tensör çarpım modülleri de tanımlanır.

Alıştırma: Önerme 2.12'nin genel halini yazıp kanıtlayınız.

Önerme 2.14.: M, N ve P A-modül olsunlar. Bu durumda sırasıyla (a), (b), (c) ve (d) ile verilen tek i), ii), iii) ve (iv) izomorfizmaları vardır.

i) $M\otimes N \to N\otimes M$, $x\otimes y \mapsto y\otimes x$

ii) $(M\otimes N)\otimes P \to M\otimes(N\otimes P) \to M\otimes N\otimes P$

$(x\otimes y)\otimes z \mapsto x\otimes(y\otimes z) \mapsto x\otimes y\otimes z$

iii) $(M\oplus N)\otimes P \to M\otimes P \oplus N\otimes P$, $(x,y)\otimes z \to (x\otimes z, y\otimes z)$

iv) $A\otimes M \to M$, $a\otimes x \mapsto ax$.

Kanıt alıştırma olarak bırakılmıştır.

Alıştırma: A ve B iki halka olmak üzere M bir A-modül, P bir B-modül ve N bir A,B-bi-modül olsun öyle ki, her $a\in A$, $b\in B$ ve $x\in N$ için $(ax)b = a(xb)$ sağlansın.

Bu durumda $M\otimes_A N$ doğal bir şekilde B-modül ve $N\otimes_B P$ de bir A-modül olur. Ayrıca,

$$(M\otimes_A N)\otimes_B P \cong M\otimes_A (N\otimes_B P) \text{ olur.}$$

Şimdi de $f: M\to M'$, $g: N\to N'$ A-modül homomorfizmaları alalım. Bu durumda

$(f\otimes g)(x\otimes y) = f(x)\otimes g(y)$ koşulunu sağlayan tek bir

$f\otimes g: M\otimes N \to M'\otimes N'$ homomorfizması vardır.

Ayrıca, bu homomorfizmalar için

$(f\otimes g)\circ(f'\otimes g') = (f\circ f')\otimes(g\circ g')$ eşitliği sağlanır.

__Katsayı Halkasının Daraltılması ve Genişletilmesi:__

$f: A\to B$ bir halka homomorfizması ve N bir B-modül olsun. Bu durumda $a\cdot x = f(a)x$, $(a,x)\in A\times N$ çarpımı sayesinde N bir A-modül yapısı kazanır.

Buna katsayı halkasının B'den A'ya kısıtlanışı denir.

Diğer yandan eğer M bir A-modül ise $M_B \doteq B \otimes_A M$ doğal olarak bir B-modül yapısı kazanır.
Bu modüle ise katsayı halkasının A'dan B'ye genişlemesi denir.

Önerme 2.16: N B-üzerinde sonlu üretilen bir modül ve B'de A-modül olarak sonlu üretilmiş olsun. Bu durumda N de sonlu üretilen bir A-modül olur.

Kanıt: $y_1, \dots, y_n$ N'nin B-modül olarak ve $x_1, \dots, x_m$ de B'nin A-modül olarak sonlu üreteçleri ise $x_i y_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, elemanları N'nin A-modül olarak bir üreteç kümesi olur.

Önerme 2.17: Eğer M sonlu üretilen bir A-modül ise

$M_B = B \otimes M$ de sonlu üretilen bir B-modül olur.

Kanıt: Eğer $x_1, \dots, x_m$ M'nin bir A-modül üreteç kümesi ise $1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_m$ de M_B için B-modül üreteç kümesi olur.

Tensör Çarpımlarının Tanlık Özellikleri:

M, N ve P A-modül olmak üzere doğal bir

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

$$(f : M \otimes N \to P) \longmapsto \left(m \mapsto \varphi_m : N \to P, \quad n \mapsto \varphi_m(n) \doteq f(m,n) \right)$$

İzomorfizması vardır.

Önerme 2.18: Eğer $M' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M'' \to 0$ bir A-modül tam dizisi ise,

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$ A-modül

dizisi de tamdır.

Uyarı 1.) $T(M) = M \otimes N$ ve $U(P) = Hom(N, P)$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$Hom(M \otimes N, P) \cong Hom(M, Hom(N, P)) \quad \text{denkliği}$$

$$Hom(T(M), P) \cong Hom(M, U(P))$$ şeklini alır. Bu durumda T'ye U'nın sol eşleniği, U'ya da T'nin sağ eşleniği denir. Yukarıdaki önermenin kanıtı şunu da gösterir: Sol eşlenik olan her funktor sağ tamdır. Benzer şekilde sağ eşlenik her funktor da sol tam olur.

2) $M' \to M \to M''$ dizisi tam olsa da $M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N$ tam olmayabilir. Örneğin $A = \mathbb{Z}$ alalım ve

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ tam dizisinin $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ile tensör çarpımını yapalım:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{f \otimes 1} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \Rightarrow & 0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \\ \wr\!\!| & & \wr\!\!| & & \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \end{array}$$

dizisini elde ederiz ve bu dizi tam değildir.

Eğer T_N funktoru tam ise N modülüne düz (flat) denir.

Önerme 2.19. Verilen bir N A-modülü için aşağıdaki koşullar denktir:

i) N düzdür
ii) Her tam $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ A-modül dizisi için $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ dizisi tamdır.
iii) Eğer $f: M' \to M$ 1-1 ise $f \otimes 1: M' \otimes N \to M \otimes N$ birebirdir.
iv) Eğer $f: M' \to M$ 1-1 ve M ve M' sonlu üretilmiş A-modüller ise $f \otimes 1: M' \otimes N \to M \otimes N$ birebirdir.

Sadece (iv) $\Rightarrow$ (iii) iddiasının kanıtını verelim.

$f: M \to M'$ bire bir ve $u = \sum x_i \otimes y_i \in \ker(f \otimes 1)$ olsun. Dolayısıyla, $(f \otimes 1)(u) = \sum f(x_i) \otimes y_i = 0 \in M \otimes N$.

M_0' x_i' elemanlarının ürettiği alt modül olsun ve

$u_0 = \sum x_i' \otimes y_i \in M_0' \otimes N$ yazalım. Bu durumda Sonuç 2.13'den dolayı sonlu üretilen bir $M_0 \subset M$ alt modül vardır öyle ki $f(M_0') \subseteq M_0$, $\sum f(x_i) \otimes y_i = 0 \in M_0 \otimes N$. olur.

$f_0 : M_0' \to M_0$ f'nin kısıtlaması ise, $(f_0 \otimes 1)(u_0) = 0$ dır.

Şimdi M_0 ve M_0' sonlu üretilmiş modüller ve f_0 ve dolayısıyla $f_0 \otimes 1$ birebir olduğu için $u_0 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $u = 0$ dır.

<u>Alıştırma 2.20.</u>: M düz bir A-modül ve $f : A \to B$ bir halka homomorfizması ise $M_B = B \otimes_A M$ düz B-modül dür.

<u>Cebirler:</u> $f : A \to B$ bir halka homomorfizması ise $a.b = f(a).b$ çarpımı sayesinde B'yi bir A-modülü olarak görebiliriz. Bu durumda B'ye A-cebiri de denir.

<u>Örnekler:</u> i) Eğer $A = k$ bir cisim ve $f \neq 0$ ise f birebirdir ve $k \cong f(k) \subseteq B$ olarak görülebilir.

ii) Her halka bir $\mathbb{Z}$-cebirdir: $n \in \mathbb{Z}$, $n.a = \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-defa}}$

iii) $f : A \to B$ ve $g : A \to C$ halka homomorfizmaları olsun.

Her $h : B \to C$ A-cebir homomorfizması olsun. Bu durumda, her $a \in A$ ve $x \in B$ için

$$h(a.x) = h(f(a)x) = h(f(a))\, h(x) \quad \text{ve}$$

$$h(a.x) = a.h(x) = g(a)\, h(x) \quad \text{elde ederiz.}$$

Dolayısıyla, $h \circ f = g$ olmalıdır. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

Bir $f : A \to B$ halka homomorfizmasına sonlu (veya B'ye sonlu A-cebir) denir eğer B A-modül olarak sonlu üretilmiş ise. Diğer yandan eğer B bir A-cebir olarak sonlu üretilmiş ise $f: A \to B$'ye sonlu tipde homomorfizma denir. Eğer $x_1, \dots, x_n$ B'nin A-cebir olarak bir üreteç kümesi ise

$$A[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow B, \quad t_i \longmapsto x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

bir örten homomorfizması vardır.

Bir halka $\mathbb{Z}$-cebir olarak sonlu eleman tarafından üretiliyorsa "sonlu üretilen cebir" olarak adlandırılır.

Cebirlerin Tensör Çarpımı:

$f: A \to B$ ve $g: A \to C$ cebir homomorfizmaları ile A-cebir olarak görülen B ve C cebirlerini A-modül olarak görerek $D = B \otimes_A C$ A-modülünü tanımlayalım.

$B \times C \times B \times C \to D$, $(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$, ile tanımlanan

fonksiyon $B \otimes C \otimes B \otimes C \to D$ seviyesinde bir homomorfizma verir. $D = B \otimes C$ olduğu için bunu $D \otimes D \to D$ şeklinde görebiliriz. Bu çarpma işlemiyle D bir A-cebir olur.

3. Bölüm: Kesirlerin Halka ve Modülleri.

A bir halka ve $1 \in S \subseteq A$ çarpma altında kapalı bir küme olsun. $A \times S$ üzerinde aşağıdaki denklik bağıntısını tanımlayalım:

$(a,s) \equiv (b,t) \Leftrightarrow (at-bs)u = 0$ olacak şekilde bir $u \in S$ varsa.

Bu bağıntının simetrik ve yansıyan olduğu açıktır. Geçişme özelliği için $(a,s) \equiv (b,t)$ ve $(b,t) \equiv (c,u)$ olsun. O halde, $(at-bs)v = 0$ ve $(bu-ct)w = 0$ olacak şekilde $v, w \in S$ vardır. Buradan

$$(at-bs)vuw + (bu-ct)wsv = 0 \Rightarrow atvuw - ctwsv = 0$$

$\Rightarrow (au-cs)tvw = 0$ elde edilir. $t, v, w \in S$ olduğu için $tvw \in S$ olur. O halde, $(a,s) \equiv (c,u)$ olur.

(a,s) ikilisinin denklik sınıfını a/s kesiri ile gösterelim. Tüm denklik sınıflarının kümesini ise $S^{-1}A$ ile göstereceğiz. Aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleriyle $S^{-1}A$ bir halka olur:

$$(a/s) + (b/t) = (at+bs)/st \quad \text{ve} \quad (a/s)\cdot(b/t) = ab/st.$$

A halkasından $S^{-1}A$ doğal $a \mapsto a/1$ homomorfizması vardır. Bu homomorfizma genelde ne 1-1 ne de örtendir.

Örnek: A tamlık bölgesi ise $S = A - \{0\}$ çarpmaya göre kapalıdır ve bu durumda $S^{-1}A$ bir cisimdir. A halkasının kesir cismi olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.: $g: A \to B$ bir halka homomorfizması olsun öyle ki her $s \in S$ için $g(s) \in B$ içinde birim olsun. Bu durumda, $g = h \circ f$ olacak şekilde tek bir $h: S^{-1}A \to B$ homomorfizması vardır.

Kanıt: Teklik: Her $a \in A$ için $h(a/1) = h(f(a)) = g(a)$ ve her $s \in S$ için $h(1/s) = h((s/1)^{-1}) = (h(s/1))^{-1} = g(s)^{-1}$

olduğu için $h(a/s) = h(a/1)\, h(1/s) = g(a)\, g(s)^{-1}$ elde edilir. Bu h'nin tekliğini kanıtlar.

<u>Varlık:</u> $h(a/s) \doteq g(a)\, g(s)^{-1}$ iyi tanımlı bir homomorfizma verir. Bu kanıtı bitirir. ☒

<u>Uyarı:</u> $f: A \to S^{-1}A$, $f(a) = a/1$ homomorfizması için aşağıdakiler doğrudur:

1) $s \in S \Rightarrow f(s) \in S^{-1}A$ bir birim elemandır.

2) $f(a) = 0$ ise $as = 0$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

3) $S^{-1}A$ halkasının her elemanı $f(a) f(s)^{-1}$ şeklinde gösterilebilir.

Aşağıdaki sonuç bu özelliklerin $S^{-1}A$ halkasını belirlediğini gösteriyor.

<u>Sonuç 3.2.:</u> $g: A \to B$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir homomorfizma olsun:
i) $s \in S \Rightarrow g(s) \in B$ birim elemandır.
ii) $g(a) = 0 \Rightarrow as = 0$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.
iii) B halkasının her elemanı $g(a) g(s)^{-1}$ şeklindedir.

Bu durumda, $g = h \circ f$ olacak şekilde tek bir $h: S^{-1}A \to B$ isomorfizması vardır.

<u>Kanıt:</u> $h: S^{-1}A \to B$ homomorfizması $h(a/s) = g(a)\, g(s)^{-1}$ olarak tanımlansın.

<u>h iyi tanımlıdır:</u> $a/s = b/t$ olsun. O halde $(at - bs)u = 0$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. $atu = bsu \Rightarrow$ $g(a) g(t) g(u) = g(b) g(s) g(u)$ eşitliğini verir. $g(u) \in B$ birim eleman olduğu için sadeleştirilebilir ve böylece $g(a) g(t) = g(b) g(s)$ ve buradan da $g(a) g(s)^{-1} = g(b) g^{-1}(t)$ bulunur. Bu kanıtı tamamlar.

(iii)'den dolayı h örtendir.

Birebir olduğunu görmek için $h(a/s) = 0$ olduğunu kabul edelim. $\Rightarrow g(a) g(s)^{-1} = 0 \Rightarrow g(a) = 0$ olur.

(ii)'den dolayı $at=0$ olacak şekilde bir $t\in S$ vardır. O halde, $(a\cdot 1 - s\cdot 0)t = at = 0$ ve $a/s = 0/1 = 0$ elde edilir. ∎

<u>Örnekler:</u> 1) $I \subseteq A$ bir ideal olsun. $S = A\setminus I$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart I idealinin asal olmasıdır. O halde, $I = \mathfrak{p}$ asal olsun. $S^{-1}A$ halkasını $A_\mathfrak{p}$ olarak göstereceğiz. $S = A\setminus\mathfrak{p}$ kümesinin her elemanı birim olduğu için $m = S^{-1}\mathfrak{p} \subseteq A_\mathfrak{p}$ içinde maximal idealdir. m'den başka bir maksimal ideal olmadığı için $A_\mathfrak{p}$ halkası yerel bir halkadır ve A'nın $\mathfrak{p}$ idealindeki yerel halkası olarak adlandırılır.

2) $S^{-1}A = 0 \iff 0 \in S$
3) $f\in A$ ve $S = \{f^n\}_{n\geq 0}$ olsun. $S^{-1}A = A_f$ ile gösterilir.
4) $I \subseteq A$ bir ideal olsun. Bu durumda, $S = 1+I = \{1+x \mid x\in I\}$ kümesi çarpma altında kapalıdır.
5) i) $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$ asal ideal olsun. Bu durumda $A_\mathfrak{p}$ paydası p ile bölünmeyen sayılardan oluşan rasyonellerin halkası olacaktır.

ii) $A = k[t_1, \dots, t_n]$ polinom halkası ve $\mathfrak{p} \subseteq A$ bir asal ideal olsun.
$V = \{x \in k^n \mid f(x) = 0,\ \forall f \in \mathfrak{p}\}$ ile tanımlanan cebirsel varyete ise $A_\mathfrak{p}$ V'nin bir komşuluğunda tanımlı rasyonel fonksiyonların (k^n'nin rasyonel fonksiyonları) halkası olur.

<u>Modüllerin Lokalizasyonu:</u> Halkalara benzer şekilde $S \subseteq A$ çarpma altında kapalı bir küme ve M bir A-modül ise $M\times S$ üzerinde tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

$$(m,s) \equiv (m',s') \iff \exists t\in S \text{ öyle ki } t(sm'-s'm)=0.$$

(m,s) elemanının denklik sınıfı m/s ve tüm denklik sınıflarının oluşturduğu modül de $S^{-1}M$ ile gösterilir.
Eğer $u: M\to N$ bir A-modül homomorfizması ise $S^{-1}u: S^{-1}M \to S^{-1}N$ de bir $S^{-1}A$-modül homomorfizması olur.

Önerme 3.3.: S^{-1} işlemi tamdır: Eğer $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ tam dizisi ise $S^{-1}M' \xrightarrow[S^{-1}f]{} S^{-1}M \xrightarrow[S^{-1}g]{} S^{-1}M''$ dizisi de tamdır.

Dolayısıyla, eğer $N \subseteq M$ bir alt modül ise $S^{-1}N \hookrightarrow S^{-1}M$ fonksiyonu da birebir olacağı için $S^{-1}N \subseteq S^{-1}M$ yazabiliriz. Ayrıca aşağıdaki sonuç da doğrudur.

Sonuç 3.4.: N ve P M içinde alt modüller ise

i) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$,
ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$, ve
iii) $S^{-1}A$-modül olarak
$$S^{-1}M / S^{-1}N \simeq S^{-1}(M/N) \text{ olur.}$$

Kanıt: (i) ve (ii)'nin kanıtlarını alıştırma olarak bırakıyoruz. Sonuncusu ise $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ dizisinin S^{-1} uygulanmasıyla elde edilir. ■

Önerme 3.5.: M bir A-modül olsun. Bu durumda,

$f: S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$, $f((a/s)\otimes m) = am/s$ ile verilen fonksiyon bir $S^{-1}A$-modül izomorfizmasıdır.

Kanıt: $S^{-1}A \times M \to S^{-1}M$, $(a/s, m) \mapsto am/s$, fonksiyonu bilineer olduğu için
$$f: S^{-1}A \otimes M \to S^{-1}M, \quad f((a/s)\otimes m) = am/s,$$

homomorfizması iyi tanımlıdır. f'nin örten olduğu açıktır.

$\sum (a_i/s_i)\otimes m_i \in S^{-1}A \otimes_A M$ elemanı için $f(\sum (a_i/s_i)\otimes m_i) = 0$ olsun.

$s = \prod_i s_i \in S$ ve $t_i = \prod_{j\neq i} s_j$ olarak tanımlansın. Böylece

$$\sum (a_i/s_i)\otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i$$

$$= \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes m, \quad m = \sum_i a_i t_i m_i \in M \text{ olur.}$$

O halde, $0 = f(\sum (a_i/s_i)\otimes m_i) = f(\frac{1}{s}\otimes m) = \frac{m}{s}$ elde edilir.

O halde, $tm=0$ olacak şekilde bir $t\in S$ vardır. Buradan,

$$\frac{1}{s}\otimes m=\frac{t}{st}\otimes m=\frac{1}{st}\otimes tm=\frac{1}{st}\otimes 0=0$$ elde edilir.

O halde, f ayrıca 1-1'dir ve bu kanıtı tamamlar. ■

Şimdi $0\to M'\to M\to M''\to 0$ tam dizi ise

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S^{-1}A\otimes_A M' & \to & S^{-1}A\otimes_A M & \to & S^{-1}A\otimes_A M'' & \to & 0 \\ & & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \\ 0 & \to & S^{-1}M' & \to & S^{-1}M & \to & S^{-1}M'' & \to & 0 \end{array}$$

dizisi de tam olacağı için $S^{-1}A$ A-modülü düzdür.

Sonuç 3.6.: $S^{-1}A$ A-modülü düzdür.

Önerme 3.7.: M,N A-modül olsun. Bu durumda, $S^{-1}A$-modül olarak tek bir

$$f: S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}N\to S^{-1}(M\otimes_A N)$$

modül izomorfizması vardır, öyle ki $f(m/s\otimes n/t)=\frac{(m\otimes n)}{st}$ olur.

Özel durumda, $p\subseteq A$ bir asal ideal ise

$$(M\otimes_A N)_p\cong M_p\otimes_{A_p}N_p$$ olur.

Kanıt alıştırma olarak bırakılmıştır.

Yerel Özellikler: Halkaların veya modüllerin aşağıdaki koşulu sağlayan bir P özelliğine yerel özellik diyeceğiz:

A (veya M) P'ye sahiptir $\Leftrightarrow$ A_p (veya M_p) her asal $p\subseteq A$ ideali için A_p (veya M_p) P'ye sahiptir.

Önerme 3.8.: Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $M=0$,

ii) Her $p\subseteq A$ asal ideali için $M_p=0$,

iii) Her $m\subseteq A$ maksimal ideali için $M_m=0$ dır.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) yönleri açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $M \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $x \in M$
$x \neq 0$ şeklinde bir eleman alalım.
Bu durumda $Ann(x) = \{a \in A \mid ax = 0\} \neq (1)$ olur.
O halde, $Ann(x) \subseteq m$ olacak şekilde bir $m \subseteq A$ maksimal ideal vardır.

$x/1 \in M_m$ elemanını düşünelim. $M_m = 0$ olduğu için $x/1 = 0$'dır. O halde, bir $s \in S = A \setminus m$ elemanı vardır öyle ki $s \cdot (1.x - 1.0) = 0 \Rightarrow sx = 0$ olur.
Fakat bu durumda $s \in Ann(x) \subseteq m$ olur. Bu ise açık bir çelişkidir. O halde, $M = 0$ olmalıdır.

Önerme 3.9.: $\phi : M \to N$ bir A-modül homomorfizması olsun.
Aşağıdaki ifadeler denktir:
i) ϕ birebirdir.
ii) Her $p \subseteq A$ asal ideali için $\phi_p : M_p \to N_p$ birebirdir.
iii) Her $m \subseteq A$ maksimal ideali için $\phi_m : M_m \to N_m$ birebirdir.

Aynı ifadelerde "birebir" sözcüğü "örten" ile değiştirilirse de doğrudur.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) kısımları açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) . $M' = \ker(\phi)$ olsun. Bu durumda
$0 \to M' \to M \to N$ tam dizidir. Önerme 3.3.'e göre $0 \to M'_m \to M_m \to N_m$ dizisi de tamdır. Dolayısıyla, $\phi_m : M_m \to M_m$ birebirdir ve dolayısıyla $\ker(\phi_m) = 0$ olur. Bu her m maksimal ideali için doğru olduğu için Önerme 3.8.'den dolayı $\ker(\phi) = M' = 0$ olur ve kanıt tamamlanır.

Modüller için düz olmak da yerel bir özelliktir:

Önerme 3.10.: M herhangi bir A-modül olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

i) M düz A-modüldür.
ii) Her $\mathfrak{p} \subseteq A$ asal ideali için $M_\mathfrak{p}$ düz $A_\mathfrak{p}$-modülüdür.
iii) Her $\mathfrak{m} \subseteq A$ maksimal ideali için $M_\mathfrak{m}$ düz $A_\mathfrak{m}$-modüldür.

Kanıt: Yine (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) (3.5) ve (2.20) den dolayı açıktır.

(iii) ⇒ (i). $N \to P$ birebir bir homomorfizma olsun.
$N \to P$ birebir $\Rightarrow N_\mathfrak{m} \to P_\mathfrak{m}$ birebir (her $\mathfrak{m} \subseteq A$ maksimal ideal için)
(2.19) $\Rightarrow N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \to P_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$ " .
(3.7) $\Rightarrow (N \otimes_A M)_\mathfrak{m} \to (P \otimes_A M)_\mathfrak{m}$ " .
(3.9) $\Rightarrow N \otimes_A M \to P \otimes_A M$ " .
$\Rightarrow M$ düz bir A-modüldür. ∎

Kesir halka ve modüllerinde ideallerin genişlemesi ve daraltılması

A bir halka, $S \subseteq A$ çarpma altında kapalı bir küme ve $f: A \to S^{-1}A$, $f(a) = a/1$, fonksiyonu olsun. C ile A içindeki daraltılmış ideallerin, E ile de $S^{-1}A$ içinde genişletilmiş ideallerin ailelerini düşünelim. Bu idealleri I^c ve I^e ile gösterelim.

Önerme 3.11. i) $S^{-1}A$ içindeki her ideal genişletilmiş idealdir.

ii) $I \subseteq A$ bir ideal ise $I^{ec} = \bigcup_{s \in S} (I : s)$. Dolayısıyla, $I^e = (1)$ olması için gerek ve yeter şart $I \cap S \neq \emptyset$ olmasıdır.

iii) $I \in C \Leftrightarrow S$ nin hiç bir elemanı A/I içinde sıfır böleni değildir.

iv) ($\mathfrak{p} \longleftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$) eşlemesi $S^{-1}A$'nın asal idealleri ile A'nın S ile kesişmeyen asal idealleri arasında birebir bir eşlemedir.

v) İdealler üzerindeki S^{-1} işlemi sonlu toplamlar, çarpımlar, kesişimler ve radikalini alma işlemleriyle yer değiştirebilir.

Kanıt alıştırma olarak bırakılmıştır.

Uyarı 1) Eğer $I, J \subseteq A$ idealleri için, J'nin sonlu üretilmiş olması durumunda $S^{-1}(I:J) = (S^{-1}I, S^{-1}J)$ olur.

2) Önerme 1.8'de şunu kanıtlamıştık: Eğer $f \in A$ nilpotent değilse f'yi içermeyen bir asal ideal vardır. Bunun bir başka kanıtını şöyle verebiliriz. $f \in A$ nilpotent olmadığı için $S = (f^n)$, $n \geq 0$, kümesi 0'ı içermez ve dolayısıyla $S^{-1}A = A_f$ halkası sıfırdan farklıdır. O halde, A_f bir maksimal ideal içerir ve bu idealin A'ya daraltılması da 3.11'den dolayı bir p asal idealdir ve $S \cap P = \phi$ olduğu için $f \notin P$ olur.

Sonuç 3.12. Eğer $n \subseteq A$ nilradikal ise $S^{-1}n \subseteq S^{-1}A$ de nilradikaldir.

Sonuç 3.13. Eğer $P \subseteq A$ asal ise, A_p halkasının asal idealleri ile A'nın p içinde kalan asal idealleri arasında birebir eşleme vardır.

Kanıt: Önerme 3.11 (iv)'de $S = A - P$ almak kanıtı verir.

Uyarı $q \subseteq p \subseteq A$ asal idealler ise $A_p/S^{-1}q$ halkasının asal idealleri A'nın q ile p arasında kalan ideallerini olur. Eğer $p = q$ alırsak $A_p/S^{-1}p$, A_p yerel halkasının kalan halkası olur.

Önerme 3.14. M sonlu üretilen bir A-modül ise

$$S^{-1}(\mathrm{Ann}\, M) = \mathrm{Ann}(S^{-1}M) \text{ olur.}$$

Kanıt: Bu ifade iki M ve N modülü için doğru ise $M+N$ için de doğrudur:

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\mathrm{Ann}(M+N)) &= S^{-1}(\mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)) && (2.2)\\
&= S^{-1}(\mathrm{Ann}(M)) \cap S^{-1}(\mathrm{Ann}(N)) && (3.4)\\
&= \mathrm{Ann}(S^{-1}M) \cap \mathrm{Ann}(S^{-1}N) && (\text{Kabulden dolayı})\\
&= \mathrm{Ann}(S^{-1}M + S^{-1}N) && (2.2)\\
&= \mathrm{Ann}(S^{-1}(M+N)) && (3.4)
\end{aligned}$$

O halde, bu sonucu sadece tek bir eleman ile üretilmiş bir M modülü için kanıtlamak yeterlidir. Bu durumda $M = A/\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \mathrm{Ann}(M)$ olur. Buradan $S^{-1}M \cong (S^{-1}A)/(S^{-1}\mathfrak{I})$ (3.4) ve böylece

$$\mathrm{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\mathfrak{I} = S^{-1}(\mathrm{Ann}(M)) \text{ elde edilir.}$$

<u>Sonuç 3.15.</u> Eğer P sonlu üretilmiş olmak üzere $N, P \subseteq A$ idealler ise $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$ olur.

<u>Kanıt:</u> $(N : P) = \mathrm{Ann}((N+P)/N)$ (2.2) olduğu için

$$\begin{aligned} S^{-1}(N:P) &= S^{-1}(\mathrm{Ann}(N+P)/N) \\ &= \mathrm{Ann}(S^{-1}((N+P)/N)) \quad (3.14) \\ &= \mathrm{Ann}(S^{-1}(N+P)/S^{-1}N) \\ &= \mathrm{Ann}(S^{-1}N + S^{-1}P/S^{-1}N) \\ &= (S^{-1}N : S^{-1}P). \end{aligned}$$

<u>Önerme 3.16.</u> $A \to B$ bir halka homomorfizması ve $\mathfrak{p} \subseteq A$ içinde bir asal ideal olsun. $\mathfrak{p}$'nin B'deki bir asal idealin daraltılması olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$ olmasıdır.

Bu önermenin kanıtını da alıştırma olarak bırakıyoruz.

Bölüm 4. Primer Ayrışım (Primary Decomposition)

A bir halka olmak üzere bir $q \subsetneq A$ idealine primer denir eğer, $xy \in q$ olmak üzere $x \in q$ veya bir $n > 0$ için $y^n \in q$ ise. Dolayısıyla, q primerdir ancak ve ancak $A/q \neq 0$ ve A/q içindeki her sıfır bölen nilpotent ise.

Her asal ideal primerdir ve her primer idealin kısıtlanışı da primerdir, çünkü eğer $f: A \to B$ bir homomorfizma ve $q \subseteq B$ primer ideal ise A/q^c halkası B/q'nun bir alt halkasına izomorfiktir.

Önerme 4.1.: $q \subseteq A$ primer olsun. Bu durumda, $r(q)$ q'yu içeren en küçük asal halkadır.

Kanıt: Aslında $p = r(q)$ idealinin asal olduğunu göstermek yeter: $xy \in r(q)$ olsun. O halde, $(xy)^m \in q$ olacak şekilde bir $m > 0$ vardır. Buradan, $x^m \in q$ veya $y^{mn} \in q$, bazı $n > 0$ için, elde ederiz. O halde, $x \in r(q)$ veya $y \in r(q)$ olmalıdır. Bu kanıtı bitirir. ∎

Eğer $p = r(q)$ ise q'ya p-primer ideal denir.

Örnekler: 1) $\mathbb{Z}$'nin primer idealleri (0) ve (p^n), p asal sayı, şeklindeki ideallerdir.

2) $A = k[x,y]$, $q = (x, y^2)$ olsun. $A/q \simeq k[y]/(y^2)$ içindeki tüm sıfır bölenler y'nin kuvvetleridir, dolayısıyla nilpotenttir. O halde, q primer idealdir ve $r(q) = (x,y)$ olur. $p^2 = (x^2, y^2, xy) \subsetneq q \subsetneq (x,y) = p$ olduğu için q asal idealin kuvveti değildir.

3) Ayrıca, bir asal idealin kuvveti de primer olmayabilir: $A = k[x,y,z]/(xy - z^2)$ olsun ve $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, x, y ve z'nin A içindeki görüntüleri olsun. $p = (\bar{x}, \bar{z})$ ideali asaldır: $A/p = k[y]$ tamlık bölgesidir. Diğer yandan, $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}^2 \in p^2$ fakat $\bar{x} \notin p^2$ ve $\bar{y} \notin r(p^2) = p$ olduğu için p^2 primer değildir.

Yine de aşağıdaki sonuç doğrudur:

Önerme 4.2.: Eğer $r(I)$ maksimal ise $I \subseteq A$ primerdir. Dolayısıyla, maksimal ideallerin kuvvetleri her zaman primer olur.

Kanıt: $r(I) = m$ olsun. m'nin A/I içindeki görüntüsü A/I'nın nilradikali olacaktır. Fakat bu görüntü A/I içinde maksimal olduğu için m'nin görüntüsü aslında A/I içindeki tek asal idealdir. O halde, A/I içindeki her eleman ya birim elemandır yada nilpotenttir. Dolayısıyla, her sıfır bölen nilpotent olmalıdır. Bu kanıtı bitirir.

İkinci kanıt: $xy \in I$ ve $x^n \notin I$, $\forall n$ olsun. O halde, $x \notin m$ olur. Diğer yandan m'nin görüntüsü A/I içinde hem maksimal hem de nilradikal olduğu için, m'nin A/I görüntüsü A/I içindeki tek asal idealdir. O halde, x'in A/I içindeki görüntüsü birim elemandır. Şimdi,

$$0 = \overline{xy} = \bar{x}\bar{y} \in A$$

ve $\bar{x} \in A/I$ birim eleman olduğu için $\bar{y} = 0$ olur. O halde, $y \in I$ olmalıdır.

Lemma 4.3.: Eğer q_i, $1 \leq i \leq n$, p-primer ise $q = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ ideali de p-primerdir.

Kanıt: $r(q) = r(\bigcap_{i=1}^{n} q_i) = \bigcap r(q_i) = p$. Şimdi, $xy \in q$ ve $y \notin q$ olsun. O halde, $xy \in q_i$ ama $y \notin q_i$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, n\}$ vardır. O halde, $x \in p = r(q)$ olur ve kanıt tamamlanır. ■

Lemma 4.4.: q A içinde bir p-primer ideal ve $x \in A$ olsun. Bu durumda,

i) $x \in q \Rightarrow (q:x) = (1)$;

ii) $x \notin q \Rightarrow (q:x)$ p-primerdir ve dolayısıyla $r(q:x) = p$ olur;

iii) $x \notin p \Rightarrow (q:x) = q$.

Kanıt: (i) açıktır.

(iii) $q \subseteq (q:x)$ açıktır. $y \in (q:x)$ alalım. O halde, $xy \in q$ olur. $x \notin p = r(q)$ kabulünden dolayı $y \in q$ dır. $\Rightarrow (q:x) = q$ olur.

ii) $y \in (q:x)$ alalım. O halde, $xy \in q$ olur. $x \notin q$ olduğu için $y \in r(q) = p$ olur. Dolayısıyla,

$q \subseteq (q:x) \subseteq p$ olur. Her üçünün de radikalini alırsak $p = r(q) \subseteq r((q:x)) \subseteq r(p) = p \Rightarrow r(q:x) = p$ elde ederiz.

Şimdi, $yz \in (q:x)$ alalım öyle ki $y \notin p$ olsun. Fakat $xyz \in q$ olduğu için $xz \in q$ olur. Dolayısıyla, $z \in (q:x)$ elde edilir. Bu kanıtı bitirir. ■

A içindeki bir $I \subseteq A$ idealinin primer ayrışımı ile q_i'ler primer olmak üzere

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$$ şeklinde bir kesişimi anlıyoruz.

Uyarı: Genelde böyle bir ayrışım yoktur. Bu kitapta sadece bu ayrışımın var olduğu halkalarla çalışacağız.

Yukarıdaki tanıma ek olarak eğer

i) $r(q_i) \neq r(q_j)$, her $i \neq j$

ii) $q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} q_j$, her $i = 1, \ldots, n$, koşulları sağlanıyorsa

bu primer ayrışıma minimal veya sadeleşmiş ayrışım denir. Lemma 4.3.1'den dolayı her primer ayrışım (i)'i sağlayacak şekilde düzenlenebilir. Sonrasında da gereksiz olanları eleyerek (ii) koşulunu sağlayacak hale getirebiliriz.

Ayrışım kabul eden ideale ayrışabilir ideal diyeceğiz.

<u>Teorem 2.5.</u> (1. Teklik Teoremi)

$I \subseteq A$ ayrışabilir bir ideal ve $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ minimal primer ayrışım olsun. $p_i = r(q_i)$, $i = 1, \ldots, n$ olsun. Bu durumda $p_1, \ldots, p_n$ idealleri $x \in A$ olmak üzere $r(I:x)$ idealleri arasında asal olanlardan ibarettir. Dolayısıyla, $p_1, \ldots, p_n$, I'nın ayrışımından bağımsızdır.

Kanıt: Her $x \in A$ için $(I:x) = (\cap q_i : x) = \cap (q_i : x)$ olduğu için $r(I:x) = \bigcap_i r(q_i : x) = \bigcap_{x \notin q_j} p_j$ (Lemma 4.4 (i) ve (ii).) elde edilir.

Eğer $r(I:x)$ asal ise Önerme 1.11'den dolayı bazı j için $r(I:x) = p_j$ olur. Dolayısıyla, $r(I:x)$ tipindeki her asal ideal p_j'lerden birine eşittir. Tersine, her $i=1,\dots,n$ için $x_i \notin q_i$ ve $x_i \in \bigcap_{j \neq i} q_j$ olacak şekilde bir x_i vardır ve dolayısıyla $r(I:x_i) = A \cap \dots \cap p_i \cap \dots \cap A = p_i$ olur. ∎

Uyarılar: 1) Yukarıdaki kanıt ile Lemma 4.4 (iii)'den dolayı, her $i=1,\dots,n$ için $(I:x_i)$ p_i-primer ideal olacak şekilde $x_i \in A$ vardır.

2) A/I halkasını bir A-modül olarak görürsek Teorem 4.5 şu ifadeye denk gelir: p_i idealleri A/a A-modülünün elemanlarının annihilatörlerinin radikallerinden oluşur.

Örnek: $I = (x^2, xy) \subseteq k[x,y] = A$ olsun. Bu durumda, $p_1 = (x)$ ve $p_2 = (x,y)$ olmak üzere $I = p_1 \cap p_2^2$ olur. Önerme 2'den dolayı $r(p_2^2) = p_2 = (x,y)$ asal olduğu için p_2^2 primer idealdir. Dolayısıyla, bu ayrışıma denk gelen asal idealler p_1 ve p_2'dir.

Diğer yandan, $p_1 \subseteq p_2$ ve $r(I) = p_1 \cap p_2 = p_1$ olduğu halde I primer bir ideal değildir.

Teorem 4.5'in ifadesinde geçen $p_1, \dots, p_n$ asal ideallerine I'ya ait idealler denir. I idealinin primer olması tek bir asal ideale sahip olmasına denktir. $\{p_1, \dots, p_n\}$ kümesinin minimal elemanlarına, I'nın minimal veya izole asal idealleri denir. Geri kalanına I'nın gömülmüş asal idealleri denir. Örneğin, yukarıdaki örnekte $p_2 = (x,y)$ ideali gömülü asal idealdir.

Önerme 4.6.: I ayrışabilir ideal olsun. Bu durumda, $p \supseteq I$ koşulunu sağlayan her p asal ideali I'ya ait olan ve I'yı içeren minimal bir asal ideal içerir. Dolayısıyla, I'nın minimal asalları, A'nın I'yı içeren tüm asal idealleri içindeki minimal ideallerdir.

Kanıt: Eğer $p \supseteq I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ ise $p = r(p) \supseteq \bigcap r(q_i) = \bigcap p_i$ olur. Dolayısıyla, Önerme 1.11' den dolayı $p \supseteq p_i$ olacak şekilde bir p_i vardır. ■

Uyarı 1) İzole veya gömülmüş asal ideal tanımlamaları geometriden gelmektedir. Bir $I \subseteq k[x_1, ..., x_n]$ idealinin tanımladığı $X = Z(I) \subseteq k^n$ varyetenin ayrışamayan parçaları minimal ideallere karşılık gelir ve bu yüzden bunlara izole asal ideal denir. Gömülmüş idealler ise ayrışamayan parçaların alt varyetelerine karşılık gelen ideallerdir.

Bir önceki örnekteki $x=0$'a (y-ekseni) karşılık gelen $p_1 = (x)$ ideali izole iken, $(0,0)$ noktasına karşılık gelen $p_2 = (x,y)$ ideali gömülmüş idealdir.

2) Primer bileşenler primer ayrışımdan bağımsız değildir. Örneğin,

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x,y)^2 = (x) \cap (x^2, y)$$

primer ayrışımlarının bileşenleri farklıdır.

Önerme 4.7.: $I \subseteq A$ ayrışabilir bir ideal, $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ minimal primer ayrışım ve $r(q_i) = p_i$ olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_i = \{ x \in A \mid (I : x) \neq I \} \text{ olur.}$$

Özel durumda, eğer $(0) \subseteq A$ ideali ayrışabilirse, A'nın sıfır bölenleri kümesi, D, (0) idealine ait olan asal ideallerin birleşimidir.

Kanıt: Eğer $I \subseteq A$ içinde ayrışabilirse, (0) ideali A/I içinde ayrışabilirdir. Ayrıca, I idealinin q_i primer ideallerinin, $\bar{q}_i$, görüntüleri A/I içinde (0) idealinin primer idealleridir. Dolayısıyla, sadece ikinci ifadeyi kanıtlamak yeterlidir.

Önerme 1.15' den dolayı $D = \bigcup_{x \neq 0} r(0:x)$' dir. Ayrıca, Theorem 4.5' den dolayı, her $x \in A$ için

$$r(0:x) = \bigcap_{x \notin q_j} p_j \subseteq p_j \text{ olacak bir } j \text{ vardır.}$$

Dolayısıyla $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ olur. Fakat yine Theorem 4.5' den dolayı her p_i ideali $r(0:x)$ şeklinde olduğu için $\bigcup p_i \subseteq D$ olur ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Bu önermenin sonucu olarak, eğer (0) ideali ayrışabilir ise

$D =$ sıfır bölenler kümesi
$= \bigcup p$, p (0) idealine ait asal ideal

ve $R =$ nilpotent elemanların kümesi
$= \bigcap p$, p (0) idealine ait olan minimal ideal.

Şimdi de primer ideallerin lokalizasyon altındaki davranışlarını inceleyelim.

<u>Önerme 4.8.</u>: $S \subseteq A$ içinde kapalı küme ve q bir p-primer ideal olsun.

i) Eğer $S \cap p \neq \emptyset$ ise $S^{-1}q = S^{-1}A$.

ii) Eğer $S \cap p = \emptyset$ ise $S^{-1}q$ $S^{-1}p$-primerdir ve bu idealin A'ya kısıtlanışı yine q'dur.

<u>Kanıt</u>: i) Eğer $s \in S \cap p$ ise $s^n \in S \cap q$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Dolayısıyla, $s^n/1 \in S^{-1}q$ olur. Fakat $s^n/1$ birim eleman olduğu için $S^{-1}q = S^{-1}A$ elde edilir.

ii) Eğer $S \cap p = \emptyset$ ise ($s \in S$ ve $as \in q$) $\Rightarrow a \in q$ olmasını gerektirir ve dolayısıyla, $q^{ec} = q$ olur. Ayrıca Önerme 3.11'den dolayı

$r(q^e) = r(S^{-1}q) = S^{-1}r(q) = S^{-1}p$ dir.

$S^{-1}q$ idealinin primer olması da kolayca görülür.

<u>Gösterim</u>: Herhangi bir $I \subseteq A$ ideali için $S^{-1}I$ idealinin A'ya kısıtlanışı, $\varphi^{-1}(S^{-1}I)$, $S(I)$ ile gösterilir,
$\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$, $a \longmapsto a/1$.

<u>Önerme 4.9.</u>: $S \subseteq A$ çarpma altında kapalı bir küme ve $I \subseteq A$ içinde ayrışabilir bir ideal olsun: $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$, $r(q_i) = p_i$, $i = 1, \dots, n$. $S \cap p_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, m$ ve $S \cap p_i \neq \emptyset$, $i = m+1, \dots, n$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, $S^{-1}I = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}q_i$ ve $S(I) = \bigcap_{i=1}^{m} q_i$ olur ve her ikisi de minimal ayrışımdır.

<u>Kanıt:</u> Önerme 3.11 ve 4.8'den dolayı $S^{-1}I = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}(q_i) = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}q_i$ olur.
Ayrıca, her $i=1,\dots,m$ için $S^{-1}q_i$ $S^{-1}p_i$-primerdir.
$p_i \cap p_j = \emptyset$, $i \neq j$ olduğu için $S^{-1}p_i \cap S^{-1}p_j = \emptyset$, $i \neq j$ olur.
Dolayısıyla, yukarıdaki $S^{-1}I$ ayrışımı minimaldir.
Son olarak her iki tarafın A'ya kısıtlanışını alırsak
$S(I) = (S^{-1}I)^c = \bigcap_{i=1}^{m} (S^{-1}q_i)^c = \bigcap_{i=1}^{m} q_i$ (Önerme 4.8.) elde ederiz. ∎

$I \subseteq A$ idealine ait asal ideallerin bir Σ kümesine, aşağıdaki koşulu sağlaması halinde izoledir denir:

Eğer p' A'ya ait bir asal ideal ve $p' \subseteq p$, $p \in \Sigma$ ise $p' \in \Sigma$'dır.

Şimdi Σ yukarıdaki gibi bir izole idealler kümesi olsun ve $S = A \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} p$ olarak tanımlansın. Bu durumda
S kümesi çarpma altında kapalıdır ve I'ya ait her p' ideali için şu ifadeler doğrudur:

$p' \in \Sigma \Rightarrow p' \cap S = \emptyset$;
$p' \notin \Sigma \Rightarrow p' \nsubseteq \bigcup_{p \in \Sigma} p$ (Önerme 1.11) $\Rightarrow p' \cap S \neq \emptyset$.

<u>Kanıt:</u> S kümesinin kapalı olduğu tanımından kolayca görülür.
$p' \in \Sigma$ ise S kümesinin tanımı gereği $p' \cap S = \emptyset$ olur.

Şimdi $p' \notin \Sigma$ alalım. Eğer $p' \subseteq \bigcup p$ ise Önerme 1.11'den dolayı bazı $p \in \Sigma$ için $p' \subseteq p$ olurdu. Buradan $p' \in \Sigma$ çelişkisi çıkardı. Dolayısıyla, $p' \nsubseteq \bigcup_{p \in \Sigma} p$ elde edilir. Bu ise $p' \cap S \neq \emptyset$ demektir.

Şimdi, aşağıdaki teorem Önerme 4.9'un bir sonucudur.

Teorem (2. Teklik Teoremi)

$I \subseteq A$ içinde ayrışabilir bir ideal ve $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ minimal primer bir ayrışım olsun. $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_m}\}$ bu ayrışım için bir izole ideal küme ise

$q_{i_1} \cap q_{i_2} \cap \dots \cap q_{i_m}$ ayrışımından bağımsızdır.

Bu teoremin özel hali aşağıdaki sonuçtur:

Sonuç 4.11. Herhangi bir $I \subseteq A$ idealinin izole asal bileşenleri (p_i minimal asal ideallerine karşılık gelen primer q_i idealleri) I tarafından tek bir şekilde belirlenir.

Kanıt: (Theorem 4.10). $S = A \setminus (p_{i_1} \cup \dots \cup p_{i_m})$ olmak üzere $q_{i_1} \cap \dots \cap q_{i_m} = S(I)$ olduğu için kanıt açıktır. ∎

Uyarı: Diğer yandan gömülmüş primer bileşenler I tarafından tek bir şekilde belirlenmezler. (Bölüm 8 Alıştırma 1'i görünüz.)

Bölüm 5: İntegral Bağımlılık ve Derecelendirmeler

İntegral Bağımlılık. B bir halka ve $1 \in A \subseteq B$ alt halka olsun. Bir $x \in B$ elemanı, $a_1, \ldots, a_n \in A$ olmak üzere, $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ şeklinde bir eşitliği sağlıyorsa x elemanına A üzerinde integral denir. Doğal olarak her $x \in A$ elemanı A üzerinde integraldir.

Örnek: $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} = B$ alalım. $x = r/s \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ üzerinde integral olsun: $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Buradan $r^n + a_1 s r^{n-1} + \cdots + a_n s^n = 0$ elde edilir. İlk baştan $(r,s) = 1$ aldığımızı kabul edersek, denklemden $s^n | r^n$ olduğu için $s = \pm 1$ elde ederiz. Dolayısıyla, $x = s/r \in \mathbb{Z}$ dur.

Önerme 5.1.: Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $x \in B$ A üzerinde integraldir.
ii) $A[x]$ sonlu üretilmiş bir A-modüldür.
iii) $A[x] \subseteq C$ olacak şekilde A-modül olarak sonlu üretilmiş bir $C \subseteq B$ alt halkası vardır.
iv) A-modül olarak sonlu üretilen bir sadık $A[x]$-modül M vardır.

Kanıt: **i ⇒ ii:** $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ denkleminden, her $r \geq 0$ için $x^{r+n} = -a_1 x^{n+r-1} - \cdots - a_n x^r$ elde ederiz. Dolayısıyla, $A[x]$ $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ ile üretilir.

ii ⇒ iii: $C = A[x]$ almak yeterlidir.

iii ⇒ iv: $M = C$ alalım. $yC = 0$ ise $y \cdot 1 = y = 0$ olacağı için M sadık bir $A[x]$-modüldür.

iv ⇒ i: $\phi : M \to M$, $\phi(m) = xm$, A-modül homomorfizmasını düşünelim. Kabul gereği M sonlu üretilmiş A-modül ve $I = A$ olmak üzere $\phi(M) \subseteq IM$ olduğu için

$\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ olacak şekilde $a_1, \ldots, a_n \in I = A$ vardır (Önerme 2.4.). Başka bir değişle, her $m \in M$ için $(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) m = 0$ dır. Son olarak, M sadık bir $A[x]$-modül olduğu için $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ olmalıdır. Bu kanıtı bitirir. ■

<u>Sonuç 5.2.</u> $x_1,\dots,x_n\in B$ elemanlı A üzerinde integral ise $A[x_1,\dots,x_n]$ A-modülü sonlu üretilmiştir.

<u>Kanıt:</u> n üzerine tümevarım yapalım. $n=1$ durumu Önerme 5.1.'den gelir. Şimdi $A_r=A[x_1,\dots,x_r]$ olarak tanımlansın. Tümevarım kabulü olarak A_{n-1}'in A-modül olarak sonlu üretildiğini kabul edelim. $A_n=A_{n-1}[x_n]$ A_{n-1}-modül olarak sonlu üretildiği için Önerme 2.16'dan dolayı $A_n=A[x_1,\dots,x_n]$ A-üzerinde sonlu üretilen bir modül olur. ■

<u>Sonuç 5.3.:</u> $C\subseteq B$, B içindeki A üzerinde integral olan elemanların kümesi olsun. Bu durumda C B'nin A'yı içeren bir alt halkasıdır.

<u>Kanıt:</u> Eğer $x,y\in C$ ise $A[x,y]$ sonlu üretilen bir A-modüldür (Önerme 5.2.). O halde, Önerme 5.1. (iii)'den dolayı $x\mp y$ ve $x\cdot y$ elemanları da A üzerinde integraldir, çünkü $A[x+y]$, $A[x-y]$ ve $A[xy]$ alt halkaları $A[x,y]$ içindedir. ■

Yukarıdaki önermedeki C halkasına A'nın B içindeki integral kapanışı denir. Eğer $B=C$ ise B'ye A üzerinde integral denir. Eğer $C=A$ ise A'ya B içinde integral kapalı denir.

<u>Uyarı:</u> $f:A\to B$ bir halka homomorfizması olsun ve B'yi bir A-cebir olarak görelim. Eğer B $f(A)$-cebir olarak integral ise f'e integral ve B'ye de integral A-cebir denir. Dolayısıyla, B $f(A)$-cebiri için

"sonlu tip + İntegral = sonlu" eşitliği verdir.

<u>Sonuç 5.4.:</u> $A\subseteq B\subseteq C$ alt halkaları için B A üzerinde, C de B üzerinde integral ise C A üzerinde integraldir.

<u>Kanıt:</u> $x\in C$ alalım. O halde, $x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n=0$ olacak

şekilde $b_1, \ldots, b_n \in B$ vardır. Önerme 5.2'den dolayı $B' = A[b_1, \ldots, b_n]$ sonlu üretilen A-modüldür. Ayrıca $x \in B$ B' üzerinde integral olduğu için $B'[x]$ sonlu üretilen B'-modüldür. O halde, $B'[x]$ sonlu üretilen A-modüldür (Önerme 2.16) ve Önerme 5.1 (iii)'den dolayı x A üzerinde integraldir.

Sonuç: $A \subseteq B$ ve C A'nın B içindeki integral kapanışı olsun. Bu durumda C B içinde integral kapalıdır.

Kanıt: $x \in B$ C üzerinde integral olsun. O halde, x A üzerinde de integraldir. Dolayısıyla, $x \in B$ olur. Bu kanıtı bitirir.

Önerme 5.6.: $A \subseteq B$ ve B A üzerinde integral olsun.

i) $I \subseteq B$ içinde bir ideal ve $J = I^c = A \cap I$ olsun. Bu durumda B/I A/J üzerinde integraldir.

ii) $S \subseteq A$ içinde çarpmaya göre kapalı bir küme olsun. Bu durumda $S^{-1}B$ $S^{-1}A$ üzerinde integraldir.

Kanıt: $x \in B$ olsun. O halde, $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ olacak şekilde $a_1, \ldots, a_n \in A$ vardır.

i) Aynı eşitlik mod I'den de geçerli olduğu için B/I A/J üzerinde integral olur.

ii) $x/s \in S^{-1}B$ olsun. O halde, yukarıdaki eşitlikten

$$(x/s)^n + \frac{a_1}{s}(x/s)^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{s^n} = 0$$

elde ederiz. Bu kanıtı bitirir.

Yukarı Çıkış Teoremi:

Önerme 5.7.: $A \subseteq B$ tamlık bölgeleri ve B üzerinde integral olsun. Bu durumda, B'nin cisim olması için gerek ve yeter şart A'nın cisim olmasıdır.

Kanıt: A bir cisim olsun ve $y \in B$, $y \neq 0$ alalım. Kabulden dolayı $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_n \in A$ vardır. Bu polinomun en küçük dereceli seçerek ve B'nin tamlık bölgesi olduğunu kullanarak $a_n \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla, denklemi

$$y(y^{n-1} + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1})(-1/a_n) = 1$$ şeklinde yazarak

$y^{-1} \in B$ elde edilir. O halde, B de bir cisimdir.

Şimdi de B'nin cisim olduğunu kabul edelim. $x \in A$ ve $x \neq 0$ olsun. $x^{-1} \in B$ olduğu için yine

$$x^{-m} + a_1' x^{-m+1} + \dots + a_m' = 0 \quad (a_i' \in A)$$ olacak şekilde

bir eşitlik vardır. Denklemi x^{m-1} ile çarparsak

$$x^{-1} = -(a_1' + a_2' x + \dots + a_m' x^{m-1}) \in A$$ elde ederiz. Bu kanıtı tamamlar. ▪

Sonuç 5.8.: $A \subseteq B$ halka ve B A üzerinde integral olsun. $q \subseteq B$ içinde asal ideal ve $p = A \cap q$ olsun. Bu durumda, q'nun maksimal olması p'nin maksimal olmasına denktir.

Kanıt: B/q A/p üzerinde integraldir ve her ikisi de tamlık bölgesidir. Bu durumda, Önerme 5.7 kanıtı tamamlar. ▪

Sonuç 5.9.: $A \subseteq B$ ve B A üzerinde integral olsun. $q \subseteq q'$ B içinde asal idealler ve $q^c = q'^c = p$ olsun. Bu durumda $q = q'$ olur.

Kanıt: Önerme 5.6'dan dolayı B_p A_p üzerinde integraldir. m p'nin A_p içindeki ve n ve n' de q ve q''nün B_p içindeki genişlemeleri olsun. Bu durumda m A_p içinde maksimal olur. Ayrıca, $n \subseteq n'$ ve $n^c = n'^c = m$ olur. Şimdi Sonuç 5.8'e göre n ve n' maksimaldir. Bu durumda ise $n = n'$ olmalıdır. Son olarak Önerme 3.11 (iv)'den dolayı $q = q'$ olur. ▪

Teorem 5.10. $A \subseteq B$ ve B A üzerinde integral olsun. Eğer $p \subseteq A$ içinde asal ise B içinde $q \cap A = p$ olacak şekilde bir asal ideal vardır.

Kanıt: Önerme 5.6'dan dolayı B_p A_p üzerinde asaldır. Aşağıdaki değişmeli diyagramı düşünelim: Yatay fonksiyonlar içerme (bire bir) fonksiyonlardır. $n \subseteq B_p$ içinde maksimal bir ideal olsun. Bu durumda Sonuç 5.8'e göre $m = n \cap A_p$ maksimal olur. A_p yerel (lokal) bir halka olduğu için m A_p'nin tek maksimal idealidir. Eğer $q = \beta^{-1}(n)$ ise q asaldır ve $q \cap A = \alpha^{-1}(m) = p$ olur. ■

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ A_p & \rightarrow & B_p \end{array}$$

Teorem 5.11. ("Yukarı Çıkış Teoremi")

$A \subseteq B$ ve B A üzerinde integral olsun. $p_1 \subseteq \cdots \subseteq p_n$ A içinde $q_1 \subseteq \cdots \subseteq q_m$ B içinde asal idealler olsun, öyle ki $q_i \cap A = p_i$, $i = 1, \ldots, m$, $m < n$. Bu durumda, $q_1 \subseteq \cdots \subseteq q_m$ zinciri $q_1 \subseteq \cdots \subseteq q_m \subseteq \cdots \subseteq q_n$ asal ideal zincirine uzatılabilir öyle ki $q_i \cap A = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, olur.

Kanıt: Tümevarım metodu sayesinde $m = 1 < 2 = n$ olduğunu kabul edebiliriz. $\bar{A} = A/p_1$ ve $\bar{B} = B/q_1$ olsun. Bu durumda $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ ve $\bar{B}$ $\bar{A}$ üzerinde integraldir (Önerme 5.6.). Şimdi Teorem 5.10'dan dolayı bir $\bar{q}_2 \subseteq \bar{B}$ asal ideali vardır ki $\bar{q}_2 \cap \bar{A} = \bar{p}_2$ olur. Şimdi $\bar{q}_2$ idealini B yükseltelim, dayalım ki q_2 olsun. Bu durumda, q_2 asal idealdir ve $q_2 \cap A = p_2$ olur. ■

Integral Kapalı Tamlık Bölgeleri, Aşağı Gidiş Teoremi:

Önerme 5.12. $A \subseteq C \subseteq B$ ve C A'nın B içindeki integral kapanışı olsun. $S \subseteq A$ çarpma altında kapalı olsun. Bu durumda, $S^{-1}C$ $S^{-1}A$'nın $S^{-1}B$ içindeki integral kapanışı olur.

Kanıt: Önerme 5.6'dan dolayı $S^{-1}C$ $S^{-1}A$ üzerinde integraldir. Şimdi $b/s \in S^{-1}B$ $S^{-1}A$ içinde integral olsun. O halde, $(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0$, olacak şekilde

$a_i \in A$, $s_i \in S$, $1 \leq i \leq n$, vardır. $t = s_1 \cdots s_n$ olmak üzere bu denklemi $(st)^n$ ile çarpalım:

$$(st)^n (b/s)^n + (st)^n (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots + (st)^n \frac{a_n}{s_n} = 0 \Rightarrow$$

$$(bt)^n + \underbrace{s a_1 \frac{t}{s_1}}_{\in A} (bt)^{n-1} + \cdots + \underbrace{s^n t^{n-1} \left(\frac{t}{s_n}\right) a_n}_{\in A} = 0$$

olduğu için (bt) A üzerinde integraldir ve dolayısıyla $bt \in C$ olur. Dolayısıyla, $b/s = bt/st \in S^{-1}C$ olur. Bu kanıtı tamamlar. ■

Bir A tamlık bölgesi $A_{(0)}$ kesirler cismi içinde integral kapalı ise A'ya integral kapalıdır denir. Örneğin, $A = \mathbb{Z}$ integral kapalıdır. Benzer şekilde herhangi aynışım bölgesi (unique factorization domain) integral kapalıdır. Dolayısıyla, $k[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkası integral kapalıdır.

<u>Önerme 5.13.</u> A bir tamlık bölgesi olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) A integral kapalıdır.
ii) Her asal $p \subseteq A$ ideal için A_p integral kapalıdır.
iii) Her maximal ideal için A_m integral kapalıdır.

<u>Kanıt:</u> $K = A_{(0)}$ kesirler cismi ve C de A'nın K içindeki integral kapanışı olsun. $f: A \to C$ içerme fonksiyonunu düşünelim. Bu durumda, A integral kapalıdır ancak ve ancak $f: A \to C$ fonksiyonu örtendir. Bir önceki önermeden dolayı (Önerme 5.12) A_p (ve A_m) integral kapalıdır ancak ve ancak f_p (ve f_m) örtendir. Şimdi Önerme 3.9 kanıtı tamamlar. ■

$A \subseteq B$ halkalar ve $I \subseteq A$ bir ideal olsun. Eğer $x \in B$ elemanı $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $a_i \in I$, şeklinde bir integral bağımlılık denklemini sağlıyorsa bu elemana I üzerinde integraldir denir. Benzer şekilde I'nın B içindeki integral kapanışı da tanımlanır.

Lemma 5.14.: $A \subseteq B$ halkalar ve C A'nın B içindeki integral kapanışı olsun. $I \subseteq A$ ideal olmak üzere I^e I'nın C içindeki genişlemesi olsun. Bu durumda I'nın B içindeki integral kapanışı I^e'nin radikalidir (ve dolayısıyla çarpma ve toplama altında kapalıdır).

Kanıt: $x \in B$ elemanı I üzerinde integral ise $a_1, \dots, a_n \in I$ olmak üzere $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ şeklinde bir denklem sağlar. O halde, $x^n \in I^e$ dir ve dolayısıyla $x \in r(I^e)$ olur.

Şimdi $x \in r(I^e)$ alalım. O halde, $x^n = \sum a_i x_i$, $n > 0$, $a_i \in I$ ve $x_i \in C$ olacak şekilde bir eşitlik vardır. Her $x_i \in C$ A üzerinde integral olduğu için $M = A[x_1, \dots, x_n]$ sonlu üretilen bir A-modüldür. Ayrıca, $x^n M \subseteq IM$ olur. Şimdi Önerme 2.4'deki ϕ homomorfizmasını x^n ile çarpma fonksiyonu alırsak, yine x^n elemanının I üzerinde integral olduğunu görürüz. Dolayısıyla, x elemanı da I üzerinde integraldir. ∎

Önerme 5.15.: $A \subseteq B$ halkalar, A integral kapalı ve $x \in B$ A'nın bir I ideali üzerinde integral olsun. Bu durumda, x $K = A_{(0)}$ üzerinde cebirseldir ve eğer $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ bu elemanın minimal polinomu ise $a_1, \dots, a_n \in r(I)$ olur.

Kanıt: x'in K üzerinde cebirsel olduğu tanımlardan açıktır. L K cisminin x elemanının tüm eşleniklerini içeren bir cisim olsun. Bu eşlenikler, diyelim ki $x_1, \dots, x_n$, ise her biri x'in sağladığı denklemi sağladığı için, I üzerinde integraldir. Yukarıdaki polinomun katsayıları, $x_1, \dots, x_n$ elemanlarının polinomları olduğu için, Lemma 5.14'den dolayı I üzerinde integraldirler. Bizim durumumuzda $C = A$ olduğu için (A integral kapalı) $I^e = I$ olur ve dolayısıyla, $a_1, \dots, a_n$ katsayıları $r(I^e) = r(I)$ içinde kalırlar. ∎

Theorem 5.16. (Aşağıya Gidiş Teoremi)
$A \subseteq B$ tamlık bölgeleri, A integral kapalı ve B A üzerinde integral olsun. Ayrıca $p_1 \supseteq \dots \supseteq p_n$ ve $q_1 \supseteq \dots \supseteq q_m$ $(m < n)$, $q_i \cap A = p_i$, $i = 1, \dots, m$, sırasıyla A ve B içinde azalan asal ideal zincirleri olsunlar. Bu durumda $q_1 \supseteq \dots \supseteq q_m$ zinciri $q_i \cap A = p_i$, $i = 1, \dots, n$, olacak şekilde bir $q_1 \supseteq \dots \supseteq q_n$

dizisine uzatılabilir.

Kanıt: Teorem 5.11'de olduğu gibi $m=1$, $n=2$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde, p_2 idealinin B_{q_1} içindeki bir asalın kesişimi olduğunu göstermeliyiz. Aslında Önerme 3.16 gereğince $B_{q_1}P_2 \cap A = P_2$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$x \in B_{q_1}P_2$ alalım. $x = y/s$, $y \in BP_2$, $s \in B \setminus q_1$ olacak şekilde yazılabilir. Lemma 5.14 gereğince y P_2 üzerinde integral olur ve dolayısıyla Önerme 5.15'den, y'nin K üzerindeki minimal polinomu $u_1, \ldots, u_n \in P_2$ olmak üzere

$y^r + u_1 y^{r-1} + \ldots + u_r = 0$ şeklindedir.

Şimdi $x \in B_{q_1}P_2 \cap A$ olduğunu kabul edelim. (Amacımız, $x \in P_2$ olduğunu göstermektir.) $s = yx^{-1}$, $x^{-1} \in K$, olur. Şimdi yukarıdaki eşitliği x^r ile bölersek

(*) $s^r + v_1 s^{r-1} + \ldots + v_r = 0$, $v_i = u_i/x^i$ elde ederiz ve bu s'nin K üzerindeki minimal polinomu olur. O halde, $x^i v_i = u_i \in P_2$ $(i=1, \ldots, r)$ elde edilir.

Fakat s A üzerinde integral olduğundan, Önerme 5.15 ($I=(1)$ alınarak) kullanılırsa $v_i \in A$, $i=1, \ldots, r$, bulunur. (s A üzerinde integral çünkü $s \in B$ ve B A üzerinde integral!)

Şimdi $x \notin P_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x^i v_i = u_i \in P_2$ eşitliğinden dolayı $v_i \in P_2$ elde edilir. Dolayısıyla (*) eşitliği $s^r \in BP_2 \subseteq BP_1 \subseteq q_1$ ve $s_1 \in q_1$ sonucunu verir. Fakat, $s_1 \in B - q_1$ olarak seçilmişti. Bu çelişki $x \in P_2$ olmasını gerektirir. Böylece kanıt tamamlanır. ∎

Önerme 5.17.: A integral kapalı bir tamlık bölgesi, $K = A_{(0)}$ kesirler cismi, $K \subseteq L$ sonlu ayrışabilir cebirsel cisim genişlemesi ve B A'nın L içindeki integral kapanışı olsun. Bu durumda, $B \subseteq \sum_{i=1}^{n} Av_i$ olacak şekilde L'nin bir K $v_1, \ldots, v_n$ tabanı vardır.

Kanıt: $v \in L$ ise kabul gereği $a_0 v^r + a_1 v^{r-1} + \ldots + a_n = 0$ olacak şekilde $a_0, \ldots, a_n \in K$ elemanları vardır. Denklemi a_0^{r-1} ile çarparsak $a_0 v = u$ elemanının A üzerinde integral olduğunu görürüz. Dolayısıyla, L'nin herhangi bir

K tabanının elemanlarını A'nın uygun elemanları ile çarparak B içinde kaldığını kabul edebiliriz.

$T: L \to K$ iz fonksiyonu olsun: $T = T_{L/K}(\alpha) = [L:K(\alpha)] \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$

$\{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_n(\alpha)\}$ α'nın K üzerindeki minimal polinomunun tüm kökleridir. L/K ayrışabilir genişleme olduğu için her kök toplamda sadece bir kere gözükecektir.

L/K ayrışabilir olduğu için T soysuzlaşmamıştır. Dolayısıyla verilen her $\{u_1, \dots, u_n\}$, $u_n \in B$, L/K tabanı için bir $\{v_1, \dots, v_n\}$ dual taban vardır:
$$T(u_i v_j) = \delta_{ij}.$$

$x = \sum x_j v_j$, $x_j \in K$, $x \in B$ alalım. $u_i \in B$ olduğu için $x u_i \in B$ olur ve dolayısıyla $T(x u_i) \in A$ (Önerme 5.15) olur. Fakat, $T(x u_i) = \sum_j T(x_j u_i v_j) = \sum_j x_j T(u_i v_j) = \sum_j x_j \delta_{ij} = x_i$ ve dolayısıyla $x_i \in A$ olur. O halde, $B \subseteq \sum_j A v_j$ olur.

Derecelendirme Halkaları

B tamlık bölgesi, $K = B_{(0)}$ kesirler cismi olsun. Eğer her $x \in K$ için $x \in B$ veya $x^{-1} \in B$ ise, B'ye K cisminin bir derecelendirme halkası denir.

Örnek: $K = \mathbb{Q}$ ve $B = \mathbb{Z}_{(p)}$, $p \in \mathbb{Z}$ asal sayı olsun. Her $x = r/s$, $(r,s) = 1$, rasyonel sayısı için $p \mid r$ ve $p \mid s$ olamaz. Dolayısıyla, ya $x \in B$ ya da $x^{-1} \in B$ olmalıdır.

Önerme 5.18. : B ve K yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda

i) B yerel halkadır.
ii) Eğer $B \subseteq B' \subseteq K$ ise B' halkası da K için bir derecelendirme halkasıdır.
iii) B (K içinde) integral kapalıdır.

Kanıt: i) m B içinde birim olmayan tüm elemanların kümesi olsun. O halde, $x \in m \iff (x = 0$ veya $x^{-1} \notin B)$ dir. (Burada $x \in K$ ve $x \neq 0$ olduğu için $x^{-1} \in K$ olur.)

Eğer $a \in B$ ve $x \in m$ ise $ax \in m$ olur, çünkü aksi halde $(ax) \notin m$ olduğu için $ax \in B$ içinde birim eleman olurdu. Buradan da $x^{-1} = a(ax)^{-1} \in B$ çelişkisi elde edilirdi.

Şimdi de $x, y \in m$ ve $x \neq 0 \neq y$ olsun. O halde, ya $xy^{-1} \in B$ ya da $x^{-1}y \in B$ olur. Eğer, $xy^{-1} \in B$ ise $x+y = (1+xy^{-1})y \in Bm \subseteq m$. Benzer şekilde $x^{-1}y \in B$ ise yine $x+y \in m$ bulunur. O halde, $m \subseteq B$ içinde bir idealdir. $B \setminus m$ birim elemanlardan oluştuğu için m maksimal idealdir. O halde, Önerme 1.6'dan dolayı B bir yerel halkadır.

ii) Tanımlardan açıktır.

iii) $x \in K$ B üzerinde integral olsun. O zaman $b_i \in B$ olmak üzere bir $x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ eşitliği vardır. Eğer $x \in B$ ise kanıt biter. Aksi halde $x^{-1} \in B$ ve dolayısıyla, denklemi $(x^{-1})^{n-1}$ ile çarparak

$$x + b_1 + b_2 x^{-1} + \dots + b_n x^{-(n-1)} = 0 \Rightarrow x = -b_1 - b_2 x^{-1} - \dots - b_n (x^{-1})^{n-1}$$
$$\Rightarrow x \in B \text{ elde edilir.}$$

Şimdi K bir cisim ve Ω cebirsel kapalı bir cisim olsun. Σ ile $A \subseteq K$ bir alt halka ve $f: A \to \Omega$ homomorfizma olmak üzere bütün (A, f) ikililerinin kümesini düşünelim. Bu küme üzerine aşağıdaki gibi tanımlanan kısmi sıralama bağıntısını koyalım:

$$(A, f) \leq (A', f') \Leftrightarrow A \subseteq A' \text{ ve } f'|_A = f.$$

Bu durumda Zorn Lemma gereğince bu kümenin bir (B, g) maksimal elemanı vardır. (B, g)'nin K için bir derecelendirme halkası olduğunu göstereceğiz. İlk önce iki tane lemma kanıtlayacağız.

Lemma 5.19.: B yerel halkadır ve $m = \ker(g)$ B'nin maksimal idealidir.

Kanıt: $g(B) \subseteq K$ bir cisim içinde alt halka olduğu için tamlık bölgesidir. Dolayısıyla, $m = \ker(g)$ asal idealdir. $g: B \to \Omega$ homomorfizmasını $\bar{g}: B_m \to \Omega$'ya genişletebiliriz: $\bar{g}(b/s) = g(b)/g(s)$

$b \in B$, $s \in B \setminus m$. Fakat (B,g) ikilisi maksimal olduğuna göre $B = B_m$ olmalıdır. Böylece B yerel halka ve m de onun maksimal idealidir. ◁

<u>Lemma 5.20.</u>: $x \in K$ ve $B[x]$ K içinde B ve x ile üretilen halka ve $m[x]$ m'nin genişlemesi olsun. Bu durumda ya $m[x] \neq B[x]$ ya da $m[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.

<u>Kanıt:</u> Diyelim ki hem $m[x] = B[x]$ hemde $m[x^{-1}] = B[x^{-1}]$ olsun. O halde $u_i, v_j \in m$ olmak üzere

$$u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1 \text{ ve } v_0 + v_1 x^{-1} + \cdots + v_n x^{-n} = 1 \text{ şeklinde}$$

eşitlikler vardır. m ve n derecelerinin minimal olduğunu kabul edebiliriz. Diyelim ki $m \geq n$ olsun. Bu durumda ikinci denklemi x^n ile çarparak $(1-v_0)x^n = v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n$ elde ederiz. $v_0 \in m$ olduğu için ve bir önceki lemmadan B yerel halka olduğu için $1 - v_0 \in B$ içinde bir elemandır ve dolayısıyla son denklemi $(1-v_0)$ ile bölerek

$x^n = w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n$, $w_j \in m$, elde edilir.

Şimdi $u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1$ denklemindeki x^m terimini $x^m = w_1 x^{m-1} + \cdots + w_n x^{m-n}$ ile değiştirerek derecesi m'den daha küçük bir bağıntı elde ederiz. Bu çelişki kanıtı bitirir. ◁

<u>Teorem 5.21.</u>: (B,g) Σ'nın bir maksimal elemanı ise B halkası K'nın bir değerlendirme halkasıdır.

<u>Kanıt:</u> $x \in K$, $x \neq 0$ olmak üzere $x \in B$ veya $x^{-1} \in B$ olduğunu göstermeliyiz. Bir önceki lemmadan dolayı $m[x] \neq B[x]$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde, $m[x]$ idealini içeren bir $m[x] \subseteq m' \subseteq B' = B[x]$ maksimal ideal vardır. $m \subseteq m' \cap B \neq B$ olduğu için $m = m' \cap B$ olmalıdır (Lemma 5.19 gereği $m \subseteq B$ maksimaldir). Dolayısıyla, $B \subseteq B'$ gömülmesi $k = B/m \hookrightarrow B'/m' = k'$ gömülmesini verir. Ayrıca, $\bar{x}$, x'in k' içindeki görüntüsü olmak üzere $k' = k[\bar{x}]$ olduğu için $\bar{x}$ k üzerinde cebirseldir. O halde, k' k'nın sonlu cebirsel bir genişlemesidir.

Şimdi, $g: B \to \Omega$, $\bar{g}: k \to \Omega$ gömme homomorfizması verir, çünkü $m = \ker(g)$ dir (Lemma 5.19). Ω cebirsel kapalı olduğu için $\bar{g}: k \to \Omega$, $\bar{g}': k' \to \Omega$ homomorfizmasına genişler. O halde, $g': B' \to k' \to \Omega$, bileşke fonksiyonu $g: B \to \Omega$ homomorfizmasını da genişletir. Fakat, (B, g) maksimal olduğu için $B' = B$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x \in B$ elde edilir. ▪

Sonuç 5.22.: A K'nın bir alt halkası olsun. O halde, A'nın K içindeki integral kapanışı, $\bar{A}$, K'nın A'yı içeren tüm derecelendirme halkalarının arakesitidir.

Kanıt: B K'nın A'yı içeren bir derecelendirme halkası olsun. B integral kapalı olacağı için (5.18 iii) $\bar{A} \subseteq B$ elde edilir. O halde, $\bar{A}$, K'nın A'yı içeren tüm derecelendirme halkalarının arakesitinin içinde kalır.

Şimdi tersine, $x \notin \bar{A}$ alalım. Eğer, $x \in A' = A[x^{-1}]$ olsaydı, $x = a_n x^{-n} + \cdots + a_0$ olacak şekilde $a_0, \ldots, a_n \in A$ olurdu. Buradan, $x^{n+1} - a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_n = 0$ elde edilirdi. Fakat, bu $x \notin \bar{A}$ kabulü ile çelişir. O halde, $x \notin A' = A[x^{-1}]$ olmalıdır. Dolayısıyla, x^{-1} A içinde birim eleman olamaz. $m' \subseteq A'$, x^{-1} elemanını içeren bir maksimal ideal olsun. Ω $k' = A'/m'$ cisminin bir cebirsel kapanışı olsun. $A' \to K = A'/m'$ homomorfizmasının A halkasına kısıtlanışı, $A \to A'/m'$, bize $A \to \Omega$ homomorfizması verir. Teorem 5.21'den dolayı bu homomorfizma bir $A \subseteq B \to \Omega$ derecelendirme halkasına genişler. $x^{-1} \to 0$ olduğu için $x \notin B$ olmalıdır. Bu kanıtı tamamlar. ▪

Önerme 5.23.: $A \subseteq B$ tamlık bölgeleri ve B A üzerinde sonlu üretilmiş olsun. $0 \neq v \in B$ alalım. O zaman, aşağıdaki koşulu sağlayan bir $0 \neq u \in A$ elemanı vardır: $f(u) \neq 0$ şartını sağlayan her $f: A \to \Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega$, homomorfizması, $g(v) \neq 0$ olacak şekilde bir $g: B \to \Omega$ homomorfizmasına genişletilebilir.

Kanıt: Tümevarım prensibini kullanarak, B'nin A'dan sadece bir eleman ile üretildiği durumu incelemek yeterli olacaktır. O halde, $B = A[x]$ olsun. İki durum vardır:

i) x A üzerinde "transcendental"dır.

$v \in B = A[x]$ olduğu için $v = a_0 x^n + \dots + a_n$ olsun, $a_0, \dots, a_n \in A$. $u = a_0$ alalım. Şimdi, $f: A \to \Omega$, $f(u) \neq 0$ olacak şekilde bir homomorfizma verilsin. Bu durumda Ω cismi sonsuz olduğu için

$f(a_0)\xi^n + \dots + f(a_n) \neq 0$ olacak şekilde bir $\xi \in \Omega$ elemanı vardır. Şimdi $g: B \to \Omega$, f'i genişletecek şekilde ve $g(x) = \xi$ olarak tanımlansın. Bu durumda $g(v) = f(a_0)\xi^n + \dots + f(a_n) \neq 0$ olacaktır. Böylece, bu durum için kanıt tamamlanır.

ii) x A üzerinde cebirsel olsun. $v \in B$ x'in polinomu olduğu için v ve v^{-1} de A üzerinde cebirseldir. O halde aşağıdaki gibi denklemler vardır:

$(*)$ $a_0 x^m + \dots + a_m = 0$, $a_0' v^{-n} + \dots + a_n' = 0$, $a_i, a_j' \in A$,

$a_0 \neq 0 \neq a_0'$. $u = a_0 a_0'$ ve $f: A \to \Omega$, $f(u) \neq 0$ olan bir homomorfizma olsun. f, $f(u^{-1}) = 1/f(u)$ ile tanımlanırsa, $f_1: A[u^{-1}] \to \Omega$ genişlemesini elde ederiz. Şimdi Teorem 5.21 sayesinde f'yi, C $A[u^{-1}]$ halkasını içeren bir derecelendirme halkası olarak, $g: C \to \Omega$ homomorfizmasına genişletebiliriz. $(*)$'dan bulunan ilk denklem gereği x $A[u^{-1}]$ üzerinde integraldir (denklemi $a_0' u^{-1}$ ile çarpalım). Dolayısıyla, Sonuç 5.22'den dolayı $x \in C$ olur. O halde, $B \subseteq C$ ve dolayısıyla $v \in C$ olur. Diğer yandan $(*)$'da bulunan ikinci denklemden dolayı v^{-1} $A[u^{-1}]$ üzerinde integraldir ve yine Sonuç 5.22'den dolayı $v^{-1} \in C$ olur. O halde $v \in C$ birim elemandır ve $h(v) \neq 0$ olmalıdır. $g = h|_B$ alarak kanıt tamamlanır.

<u>Sonuç 5.24.</u>: K bir cisim ve B sonlu üretilmiş bir k-cebir olsun. Eğer B bir cisim ise, k'nın sonlu bir cebirsel genişlemesidir.

<u>Kanıt:</u> $A = k$, $v = 1$ ve $\Omega = \bar{k}$ almak yeterlidir: $f: k \to \bar{k}$, $f(x) = x$, olmak üzere bir $g: B \to \bar{k}$ genişlemesi vardır. $g(1) = g(v) \neq 0$ olduğu için g 1-1'dir. $B = A[x_1, \dots, x_n]$ olduğu için B A'nın sonlu cebirsel bir genişlemesidir.

<u>Uyarı</u>: Sonuç 5.24. Hilbert Nullstellensatz'ın bir formülasyonudur. Ayrıca (7.9)'un görünüşü.

Bölüm 6. Zincir Kuralları:

İlk önce sıralama bağıntıları üzerine bir hatırlatma da bulunalım:

Önerme 6.1.: Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olan bir Σ kümesi için aşağıdaki koşullar denktir:

i) Her artan $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$, $x_i \in \Sigma$, dizisi durağandır. (stationary) Başka bir deyişle, öyle bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $k \geq n$ için $x_k = x_n$ olur.

ii) Σ kümesinin boş olmayan her alt kümesinin maksimal elemanı vardır.

Kanıt: i $\Rightarrow$ ii: Eğer bir $T \neq \emptyset$ alt kümesinin maksimal elemanı yoksa T içinde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, şeklinde bir dizi kurabiliriz.

ii $\Rightarrow$ i: Verilen bir $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq$ dizisi için

$T = \{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ kümesinin maksimal elemanı x_N olsun. Bu durumda $x_N = x_{N+1} = \cdots$ olacaktır. Böylece kanıt tamamlanır. ∎

M bir R-modül ve Σ ise M'nin altmodüllerinin kümesi olsun. Kapsama bağıntısı Σ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Eğer Σ (i) koşulunu sağlıyorsa "artan zincir koşulunu" sağlıyor denir. Eğer Σ (ii) koşulunu sağlıyorsa "maksimal" koşulunu sağlıyor denir. Alt modüllerinin kümesi bu denk koşullardan birini sağlayan bir modüle Noetheryan modül denir (Emmy Noether'e atfen).

Eğer Σ "$\supseteq$" bağıntısıyla sıralanırsa ($N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$) (i) koşulunu "azalan zincir koşulunu" sağlıyor denir. Benzer şekilde, (ii) koşulunu sağlıyorsa "minimal" koşulunu sağlıyor denir. Alt modülleri bu denk koşulları sağlayan bir modüle ise Artinyan modül denir (Emil Artin).

Örnekler: 1) Herhangi bir sonlu $\mathbb{Z}$-modül (abelyan grup) hem Noetheryan hem de Artinyan'dır. Aslında her sonlu R-modül için de bu durum geçerlidir.

2) $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$-modül) olarak Noetheryandır ama Artinyan değildir.

3) $p \in \mathbb{Z}$ asal olsun. $G = \{ \frac{a}{b} \mid o(\frac{a}{b}) = p^n, n \in \mathbb{N} \} \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Bu durumda, her $n \geq 0$ için G'nin eleman sayısı p^n olan tek bir G_n alt grubu vardır. Bu alt gruplar ($\mathbb{Z}$-modüller)

$G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots$ koşulunu sağlar. Dolayısıyla, G

Noetheryan bir $\mathbb{Z}$-modül değildir ama Artinyan bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

4) $H = \{ a/b \in \mathbb{Q} \mid b = p^n \} \leq \mathbb{Q}$ (p sabit asal sayı) ne

Noetheryan ne de Artinyandır. Bunu görmek için

$0 \to \mathbb{Z} \to H \to G \to 0$ tam dizisini düşünelim.

Şimdi, $\mathbb{Z}$ Artinyan olmadığı için H Artinyan değildir. Aynı şekilde G Noetheryan olmadığı için H Noetheryan değildir.

5) $k[x]$, k cisim, polinom halkası $k[x]$-modül olarak Noetheryandır ve Artinyan değildir.

6) $k[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ halkası ne Noetheryan ne de Artinyandır.

$(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_2, x_3) \subset \cdots$

$(x_1) \supset (x_1^2) \supset (x_1^3) \supset \cdots$

7) Daha sonra Artinyan olan her halkanın Noetheryan olduğunu göreceğiz.

Önerme 6.2.: M bir A-modül olmak üzere Noetheryandır ancak ve ancak M'nin her alt modülü sonlu üretilebilir-dir.

Kanıt: ($\Rightarrow$) $N \leq M$ bir alt modül ve Σ N'nin sonlu üretilen tüm alt modüllerinin kümesi olsun. $0 \in \Sigma$ olduğu için Σ boş değildir. Dolayısıyla, Zorn Lemma'dan dolayı Σ'nın bir maksimal elemanı vardır, diyelim ki N_0 olsun. Eğer $N_0 \neq N$ değilse $x \in N \setminus N_0$ elemanı seçelim. Bu durumda $N_0 + Ax$ alt modülü sonlu üretilmiştir ve $N_0 \subsetneq N_0 + Ax \subseteq N$'dir. Bu N_0'ın seçimi ile çelişir ve dolayısıyla $N = N_0$'dır ve bu yüzden N sonlu üretilmiştir.

($\Leftarrow$) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ bir artan dizi olsun. $N = \bigcup_{i}^{\infty} M_i \subseteq M$ alt modülü sonlu eleman tarafından üretilecektir, diyelim ki $x_1, \ldots, x_n \in N$ olsun. $x_k \in M_{i_k}$, olsun. $i_0 = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$ ise $x_1, \ldots, x_n \in M_{i_0}$ olur. Dolayısıyla, $N = M_{i_0}$ olur. Bu durumda $M_{i_0} = M_i$, $i \geq i_0$ olur ve kanıt tamamlanır. ∎

Önerme 6.3.: $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ A-modüllerin tam dizisi olsun. Bu durumda,

i) M Noetheryandır $\Leftrightarrow$ M' ve M'' Noetheryandır.
ii) M Artinyandır $\Leftrightarrow$ M' ve M'' Artinyandır.

Kanıt: (ii)'nin kanıtı alıştırma olarak bırakılmıştır.

(i) : ($\Rightarrow$) M'nin her alt modülü sonlu üretildiği için ve $M' \to M$ birebir olduğu için ve M' modülünün her alt modülü de sonlu üretilir. Benzer şekilde M'' modülünün her $N \subseteq M''$ alt modülü M'nin bir alt modülünün görüntüsüdür ve dolayısıyla sonlu üretilmiştir.

($\Leftarrow$) $N \subseteq M$ bir alt modül olsun. $N'' = \beta(N)$ ve $N' = N \cap \ker(\beta) = N \cap \operatorname{Im} \alpha$ olmak üzere

$0 \to N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \to 0$ tam dizidir. N'' ve N' M'' ve M''nin alt modülleri olduğu için sonlu üretilmiş-lerdir. $N'' = \langle x_1, \ldots x_n \rangle$, $N' = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$ olsun. $\beta(z_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ olacak şekilde elemanlar seçelim.

$z \in N$ alalım. $\beta(z) = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$, $r_n \in A$ olsun. Bu durumda $\beta(z - r_1 z_1 - \dots - r_n z_n) = 0$ olur. O halde, $z - r_1 z_1 - \dots - r_n z_n \in \ker \beta = \mathrm{Im}(\alpha) \cong N'$ olduğu için $z - r_1 z_1 - \dots - r_n z_n = \alpha(s_1 y_1 + \dots + s_m y_m)$, $s_i \in A$ olur.

$$\Rightarrow z = r_1 z_1 + \dots + r_n z_n + s_1 \alpha(y_1) + \dots + s_m \alpha(y_m).$$

Dolayısıyla, $N = \langle z_1, \dots, z_n, \alpha(y_1), \dots, \alpha(y_m) \rangle$ olur ve kanıt tamamlanır. ∎

<u>Sonuç 6.4.</u>: M_i, $i = 1, \dots, n$, Noetheryan (Artinyen) ise $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ Noetheryan (Artinyen) modüldür.

<u>Örnekler:</u> 1) Her cisim Noetheryan ve Artinyendir.

2) Her esas ideal bölgesi Noetheryandır.

3) $k[x_1, x_2, \dots]$ ne Noetheryan ne de Artinyandır. $K = k[x_1, x_2, \dots]_{(0)}$ cismi ise Noetheryan ve Artinyandır. Dolayısıyla, Noetheryan (Artinyen) bir halkanın alt halkaları Noetheryan (Artinyen) olmayabilir!

4) X sonsuz elemanlı tıkız, Hausdorff topolojik uzay olsun. $C(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli fonksiyondur} \}$, sürekli fonksiyonlar halkası olsun. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ kesin azalan kapalı kümeler dizisi olsun. $I_n = \{ f \in C(X),\ f(F_n) = 0 \}$ ideali olsun. Bu durumda, $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq I_3 \subsetneqq \dots$ olur ve dolayısıyla $C(X)$ Noetheryan değildir.

<u>Önerme 6.5.</u> A Noetheryan (Artinyen) halka ve M sonlu üretilen bir A-modül olsun. Bu durumda, M Noetheryandır (Artinyandır).

<u>Kanıt.</u> A Noetheryan A-modül olduğu için $A \oplus \dots \oplus A = A^n$ Noetheryandır (Sonuç 6.4.). Şimdi

$$0 \to \ker(\varphi) \to A^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0, \quad e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$
$$e_i \longmapsto m_i$$

ve $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$, tam dizisi kanıtı bitirir (Önerme 6.3.) ∎

<u>Önerme 6.6.</u> A Noetheryan (Artinyen) halka ve $I \subseteq A$ bir ideal olsun. Bu durumda, A/I Noetheryan (Artinyen) halka olur.

Kanıt: A/P tek eleman tarafından üretilen A-modül olduğu için Noetheryen A-modüldür. Dolayısıyla, Noetheryen A/I-modüldür. O halde, A/I Noetheryen halkadır. ■

$M_i \neq M_{i+1}$ olacak şekildeki bir $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$ alt modüller dizisine boyu n olan zincir denir. Eğer bu zincir maksimal ise buna M'nin bir kompozisyon serisi denir.

Önerme 6.7.: M uzunluğu n olan bir kompozisyon serisine sahip olsun. Bu durumda, M'nin her kompozisyon serisinin uzunluğu n dir. Ayrıca her zincir bir kompozisyon serisine uzatılabilir.

Kanıt: $l(M)$ M'nin kompozisyon serilerinin en kısasının uzunluğu olsun. Eğer $l(M) = +\infty$ ise M'nin kompozisyon serisi yoktur diyeceğiz.

i) $N \subsetneq M$ ise $l(N) < l(M)$ olur. Kanıt: (M_i) M'nin minimum uzunluğa sahip bir kompozisyon serisi olsun. $N_i = N \cap M_i$ olarak tanımlansın. $N_{i-1}/N_i \subseteq M_{i-1}/M_i$ ve M_{i-1}/M_i basit modül olduğu için (0 ve kendisi dışında alt modül yok) $N_{i-1}/N_i = 0$ veya $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ olur. Dolayısıyla tekrar eden terimleri atarak N_i dizisinin uzunluğu için $l(N) \leq l(M)$ elde ederiz.
Diyelim ki $l(N) = l(M) = n$ olsun. O halde, her i için $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ olur.

$i = n$, $M_{n-1}/M_n = N_{n-1}/N_n \Rightarrow M_{n-1}/(0) = N_{n-1}/(0)$
$\Rightarrow M_{n-1} = N_{n-1}$ elde edilir.

$i = n-1$, $M_{n-2}/M_{n-1} = N_{n-2}/N_{n-1} \Rightarrow M_{n-2}/M_{n-1} = N_{n-2}/M_{n-1}$
$\Rightarrow M_{n-2} = N_{n-2}$ elde edilir.

Bu şekilde ilerleyerek, $M = N$ bulunur.

ii) M'nin her zincirinin uzunluğu $l(M)$'den küçük veya eşittir. Kanıt. $M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_k=0$ bir zincir olsun. O halde, (i)'den dolayı

$l(M)>l(M_1)>\cdots>l(M_k)=0$ olacağı için $l(M)\geq k$ olur.

iii) M'nin uzunluğu k olan herhangi bir kompozisyon serisini alalım. (ii)'den dolayı $k\leq l(M)$ olur. Diğer yandan, $l(M)$'nin tanımı gereği $l(M)\leq k$ olduğu için $l(M)=k$ olur. Dolayısıyla her kompozisyon serisinin uzunluğu $l(M)$ dir.

Son olarak, herhangi bir zincir alalım. Eğer uzunluğu $l(M)$ ise maksimal olmalıdır ve dolayısıyla bir kompozisyon serisidir. Eğer uzunluğu $l(M)$'den küçük ise kompozisyon serisi değildir ve dolayısıyla maksimal değildir. Bu durumda daha uzun bir seriye genişletilebilir. Bu kanıtı tamamlar. ∎

Önerme 6.8.: M'nin kompozisyon serisi vardır $\Leftrightarrow$ M hem Noetheryan hem de Artinyendir.

Kanıt: ($\Rightarrow$) yönü tanımlardan açıktır.

($\Leftarrow$) $M_0=M$ olsun. Σ ile M'nin M'ye eşit olmayan tüm alt modüllerinin kümesi olsun. M Noetheryan olduğu için Σ kümesi Önerme 6.1.(i)'yi sağlar. Dolayısıyla, Σ kümesi Önerme 6.2.(ii)'den dolayı bir maksimal eleman içerir, diyelim ki $M_1\subset M_0=M$ olsun. M_1 modülünde hem Noetheryan hemde Artinyen olduğu için aynı nedenlerle M_1'de bir maksimal alt modül, M_2 olsun, içerir. Bu şekilde oluşan $M=M_0\underset{\neq}{\supset}M_1\underset{\neq}{\supset}M_2\underset{\neq}{\supset}\cdots$ dizisi de, M Artinyen olduğu için durmak zorundadır:

$$M=M_0\underset{\neq}{\supset}M_1\underset{\neq}{\supset}M_2\underset{\neq}{\supset}\cdots\underset{\neq}{\supset}M_k.$$

Bu dizi daha da uzatılamıyorsa $M_k=(0)$ olmalıdır. Ayrıca, her i için $M_k\underset{\neq}{\subset}M_{k-1}$ içinde maksimal olduğu için bu zincir bir kompozisyon serisidir. Bu kanıtı bitirir. ∎

Hem a.c.c. (Ascending Chain Condition = Noetheryan), hem de d.c.c. (Decending Chain Condition = Artinyan) modüllere sonlu tip modül denir. Sonlu tip modüllerin $l(M)$ sayısına modülün boyu denir.

<u>Önerme 6.9.:</u> $l(M)$ fonksiyonu sonlu tip A-modüller sınıfı üzerinde toplamsaldır.

<u>Kanıt:</u> Sonlu tipteki modüllerin her $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ tam dizisi için $l(M) = l(M') + l(M'')$ olduğunu göstermeliyiz. M' modülünün bir $M' = N_0 \supset N_1 \cdots \supset N_k = (0)$ ve M'' modülünün $M'' = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_l = (0)$ kompozisyon serileri alalım. Bu durumda

$$M = \beta^{-1}(M'') \supset \beta^{-1}(L_1) \supset \cdots \supset \beta^{-1}(L_l) = \beta^{-1}(0) = \alpha(M') \supset \alpha(N_1) \cdots \supset \alpha(N_k) = (0)$$

zinciri de bir kompozisyon serisidir.

Dolayısıyle, $l(M) = l + k = l(M') + l(M'')$ olur. ∎

<u>Önerme 6.10.:</u> k bir cisim olmak üzere, bir V k-vektör uzayı için aşağıdaki koşullar denktir.

i) V sonlu boyuttudur.
ii) sonlu tiptedir.
iii) a.c.c. koşulunu sağlar (Noetheryan)
iv) d.c.c. " " (Artinyan)

Ayrıca vektör uzayları için $l(V) = \dim_k(V)$ olur.

Kanıt alıştırma olarak bırakılmıştır.

<u>Sonuç 6.11.:</u> A bir halka olsun öyle ki, (0) ideali sonlu tane $m_1, m_2, \ldots, m_n$ maksimal idealin çarpımı olsun. Bu durumda, A Noetheryandır ancak ve ancak A Artinyandır.

<u>Kanıt:</u> $A \supset m_1 \supset m_1 m_2 \supset \cdots \supset m_1 \cdots m_n = (0)$ zincirini ele alalım. Her $m_1 \cdots m_{i-1} / m_1 \cdots m_i$ bölümü A/m_i cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. O halde, bu bölüm için a.c.c. ve d.c.c. koşulları denktir. Fakat bu modüller doğal olarak A-modüllerdir.

Başka bir deyişle, A modül olarak bu bölümler için a.c.c. ve d.c.c. koşulları denktir. Şimdi, Önerme 6.3.1'i (defalarca) kullanarak kanıtı tamamlarız.

Bölüm 7. Noetheryan Halkalar:

Noetheryan halkanın birbirine denk üç koşulunu hatırlayalım: A bir halka olsun.

1) A'nın boştan farklı her ideller kümesinin bir maksimal elemanı vardır.
2) A'nın her artan ideal dizisi sabitlenir (a.c.c.)
3) A'nın her ideali sonlu üretilmiştir.

Önerme 7.1: Noetheryan bir halkanın görüntüsü de Noetheryandır.

Kanıt: $\varphi : A \to B$, $\operatorname{Im}\varphi = B$ olsun. O halde, $B \simeq A/_{\ker\varphi}$ olur. Önerme 6.6. kanıtı bitirir. ∎

Önerme 7.2.: $A \subseteq B$ halkalar, A Noetheryan ve B de sonlu üretilen bir A-modül olsun. Bu durumda B de Noetheryan halkadır.

Kanıt: Önerme 6.5.'den dolayı B Noetheryan A-modüldür. Dolayısıyla, Noetheryan halkadır. ∎

Örnek: $\mathbb{Z}$ Noetheryan olduğu için $\mathbb{Z}[i]$ ve daha genel olarak her cebirsel sayı cisminin sayı halkası Noetheryandır.

Önerme 7.3.: Eğer A Noetheryan ve $S \subseteq A$ çarpma altında kapalı bir halka ise $S^{-1}A$ halkası da Noetheryandır.

Kanıt: A'nın S ile kesişmeyen idealleri ile $S^{-1}A$ idealleri arasında kapsama bağıntısını koruyan bire bir eşleme vardır (Önerme 1.17(iii) ve Önerme 3.11 (i)). Bu kanıtı bitirir.

İkinci bir kanıt olarak: Eğer bir $I \subseteq A$ ideali $x_1, \dots, x_n$ ile üretiliyorsa $S^{-1}I$ $x_1/1, \dots, x_n/1$ ile üretilir! ∎

Sonuç 7.4.: A Noetheryan $p \subseteq A$ asal ideal ise A_p Noetheryandır.

Teorem 7.5.: (Hilbert Taban Teoremi) Eğer A Noetheryan ise $A[x]$ polinom halkası da Noetheryandır.

Kanıt: $\mathfrak{a} \subseteq A[X]$ bir ideal olsun. $\mathfrak{a}$'nın içindeki polinomların başlangıç katsayıları A içinde bir ideal oluşturur, bu $I \subseteq A$ olsun. A Noetheryen olduğu için bazı $a_1, \dots, a_n \in A$ için $I = (a_1, \dots, a_n)$ olur. Her $i = 1, \dots, n$ için bir $f_i = a_i x^{r_i} + \dots \in \mathfrak{a}$ polinomu seçelim. $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ olsun. $\mathfrak{a}' = (f_1, \dots, f_n)$ olsun.

$f = ax^m + (\text{düşük dereceli terimler}) \in \mathfrak{a}$ herhangi bir polinom olsun. Tanımı gereği $a \in I$ olur. Eğer $m \geq r$ ise $a = \sum_{i=1} u_i a_i$, $u_i \in A$ yazalım. O halde $f - \sum u_i f_i x^{m-r_i}$ $\mathfrak{a}$ içinde derecesi m'den küçük bir polinom olur. Bu şekilde devam ederek, yeni f'den $\mathfrak{a}'$ ideali içinde kalan polinomlar çıkartarak, sonunda bir g polinomu buluruz öyle ki, $\deg g < r$ ve $f = g + h$, $h \in \mathfrak{a}'$ olur.

M, $1, x, \dots, x^{r-1}$ tarafından üretilen A-modülü olsun. O halde, yukarıda elde ettiğimiz ifade bize $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$ eşitliğini kanıtlar. M sonlu eleman tarafından üretildiği için Noetheryendir. Dolayısıyla, $\mathfrak{a} \cap M$ sonlu eleman tarafından üretilir, diyelim ki $g_1, \dots, g_\ell$ olsun. O halde, $\mathfrak{a}$ sonlu sayıda $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_\ell$ elemanı tarafından üretilir. Başka bir deyişle, $A[X]$ Noetheryendir.

Uyarı Benzer bir kanıt $A[[X]]$ (formel kuvvet serileri) halkasının da Noetheryendir. Burada, I idealini $\mathfrak{a}$'nın içindeki en küçük dereceli terimlerinin ürettiği ideal almalıyız.

Tümevarım aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 7.6.: A Noetheryen ise $A[x_1, \dots, x_n]$ Noetheryendir.

Sonuç 7.7.: A Noetheryen ve B sonlu üretilen bir A-cebir ise Noetheryendir. Dolayısıyla, bir cisim üzerinde sonlu eleman tarafından üretilen her halka ve cebir Noetheryendir.

Kanıt: B Noetheryen $A[x_1, \dots, x_n]$ halkasının homomorfizma altındaki görüntüsü olacağı için Noetheryendir.

Önerme 7.8.: $A \subseteq B \subseteq C$ halkalar olsun. A Noetheryen ve C sonlu üretilen bir A-cebir olsun. Ayrıca ya (i) C sonlu üretilen B-modül yada (ii) C B üzerinde integral olsun. Bu durumda, B sonlu üretilen A-cebirdir.

Kanıt: Önerme 5.1 ve Sonuç 5.2'den dolayı (i) ve (ii) koşulları denktir, dolayısıyla (i)'yi kabul edelim. $x_1, \dots, x_n$ C'yi A-cebir ve $y_1, \dots, y_n$ de C'yi B-modül olarak üretsin. O halde,

$$(*) \quad x_i = \sum_j b_{ij} y_j \quad \text{ve} \quad y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \quad \text{olacak şekilde}$$

$b_{ij}, b_{ijk} \in B$ elemanları vardır.

B_0 b_{ij} ve b_{ijk} elemanları tarafından üretilen A-cebir olsun. A Noetheryen olduğu için B_0 da öyledir ve $A \subseteq B_0 \subseteq B$ olur. C'nin her elemanı, katsayıları A içinde olan, $x_1, \dots, x_n$ elemanlarının bir polinomudur. $(*)$ eşitliklerini, gerekirse defalarca kullanarak, C'nin her elemanının katsayıları B_0 içinde olmak üzere y_i'lerin doğrusal bir ifadesi olduğunu görürüz. Dolayısıyla, C sonlu üretilen bir B_0-moduldür. B_0 Noetheryen ve $B \subseteq C$ alt modül olduğu için, Önerme 6.2 ve 6.5'den dolayı B sonlu üretilen bir B_0-modüldür. Son olarak, B_0 sonlu üretilen A-cebir olduğu için B de sonlu üretilen bir A-cebirdir. ∎

Önerme 7.9.: k bir cisim ve E sonlu üretilen bir k-cebir olsun. Eğer E bir cisim ise, k'nın sonlu cebirsel bir genişlemesidir.

Kanıt: $E = k[x_1, \dots, x_n]$, $x_1, \dots, x_n \in E$ olduğu verilmiştir. Eğer E k üzerinde cebirsel değilse sıra kabul edebiliriz. Bir $1 \leq r \leq n$ sayısı için $x_1, \dots, x_r$ k üzerinde cebirsel bağımsızdır ve $x_{r+1}, \dots, x_n$, $F = k(x_1, \dots, x_r)$ cismi üzerinde cebirseldir. Dolayısıyla E F cisminin sonlu cebirsel bir genişlemesidir. O halde, E aslında sonlu üretilen bir F-modüldür. Şimdi Önerme 7.8.'i $k \subseteq F \subseteq E$ üçlüsüne uygularsak F'nin sonlu üretilen bir k-cebir olduğunu görürüz. Diyelim ki, $F = k[y_1, \dots, y_s]$ olsun. $f_i, g_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ olmak üzere, $y_i = f_i/g_i$, $i = 1, \dots, s$, olduğu için

$h = g_1 \cdots g_s + 1$ polinomu olsun. Bu durumda $h^{-1} \in F$ elemanı y_i'lerin bir polinomu olamaz:

$f_i, g_i \in k[x_1, \ldots, x_r] \subseteq k(x_1, \ldots, x_r) = F = k[y_1, \ldots, y_s]$, $y_i = f_i/g_i$.

O halde, $h = g_1 \cdots g_s + 1 \in F = k[y_1, \ldots, y_s]$ ve $1/h \in F = k[y_1, \ldots, y_s]$

$\Rightarrow h \in k \Rightarrow g_i \in k$. Buradan, $F = k[y_1, \ldots, y_s] \subseteq k[x_1, \ldots, x_r]$.

$\Rightarrow k[x_1, \ldots, x_r] = k(x_1, \ldots, x_r)$ çelişkisini elde ederiz.

Bu durumda, E k üzerinde cebirseldir ve dolayısıyla, k'nın sonlu cebirsel genişlemesidir. ∎

<u>Sonuç 7.10.</u>: k cisim ve A sonlu üretilen bir k-cebir olsun. $m \subseteq A$ maksimal ideal ise, A/m k'nın sonlu cebirsel genişlemesi olur. Dolayısıyla, eğer k cebirsel kapalı ise $(\bar{k} = k)$ $A/m \cong k$ olmalıdır.

<u>Kanıt:</u> Yukarıdaki önermede $E = A/m$ alalım. ∎

<u>Uyarı:</u> Sonuç 7.10 "Hilbert Nullstellensatz"ın zayıf hali olarak bilinir. Yukarıda verdiğimiz kanıt Artin ve Tate tarafından yapılmıştır.

<u>Noetheryen Halkaların Primer Ayrışımları:</u>

Önce, Noetheryen bir halkadaki her idealin primer ayrışımı olduğunu göreceğiz.

<u>Lemma 7.11.</u>: Noetheryen bir halkanın her ideali sonlu tane indirgenemez idealin kesişimidir.

<u>Kanıt:</u> Diyelim ki lemma doğru olmasın. Lemma'nın sonucunu sağlamayan ideallerin içinde maksimal bir eleman seçelim, diyelim ki I olsun (I A içinde maksimal olmayabilir.) I ideali indirgenemez olamaz, dolayısıyla $I = J \cap K$, $I \subsetneq J$ ve $I \subsetneq K$ olacak şekilde bir kesişim vardır.

Fakat I'nın tanımından dolayı J ve K idealleri sonlu tane indirgenemez idealin kesişimleri olmalıdır. O halde, $I = J \cap K$ ideali de sonlu tane indirgenemez idealin kesişimidir. Bu çelişki kanıtı bitirir. ▪

Lemma 7.12.: Noetheryen bir halkada her indirgenemez ideal primerdir.

Kanıt: Bölüm halkasına geçersek şunu kanıtlamamız yeterlidir: Eğer (0) halkası indirgenemez ise, primerdir. $xy = 0$ ve $y \neq 0$ alalım. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = 0$ olduğunu göstermeliyiz. * Noetheryen olduğu için

$Ann(x) \subseteq Ann(x^2) \subseteq \ldots$ dizisi bir noktadan itibaren sabit olmalıdır: $Ann(x^n) = Ann(x^{n+1}) = \ldots$.

İddia: $(x^n) \cap (y) = 0$.

Kanıt: $a \in (y) \cap (x^n)$ alalım. $a \in (y)$ ve $xy = 0$ olduğu için $ax = 0$ olur. Diğer yandan $a \in (x^n) \Rightarrow a = bx^n$, bazı $b \in A$ için. O halde, $0 = ax = (bx^n)x = bx^{n+1}$ olur ve dolayısıyla, $b \in Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n) \Rightarrow bx^n = 0 \Rightarrow a = bx^n = 0$ elde edilir. Bu İddia'nın kanıtını tamamlar. ▪

Son olarak, (0) indirgenemez ideal ve $(y) \neq 0$ olduğundan $x^n = 0$ olmalıdır. O halde, (0) primer idealdir. ▪

Bu iki lemmanın sonucu olarak aşağıdaki sonucu elde etmiş olduk.

Teorem 7.13.: Noetheryen bir halkada her idealin primer ayrışımı vardır.

Dolayısıyla, 4. Bölüm'ün sonuçları Noetheryen halkalar için geçerlidir.

Önerme 7.14.: Noetheryen bir halkada her ideal radikalinin bir kuvvetini içerir.

Kanıt: $I \subseteq A$ bir ideal ve $x_1, \dots, x_k$ $r(I)$'nın bir sonlu üreteç kümesi olsun. Her $i = 1, \dots, k$ için $x_i^{n_i} \in I$ olacak şekilde $n_i \in \mathbb{N}$ seçelim. $m \in \mathbb{N}$ sayısı
$$m = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + 1 \text{ olarak tanımlansın.}$$

O halde, $r(I)^m$ ideali $x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}$, $\sum r_i = m$, elemanlar tarafından üretilir. m sayısının tanımı gereği en az bir $i = 1, \dots, k$, için $r_i \geq n_i$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k} \in I$ olur. O halde, $r(I)^m \subseteq I$ elde edilir. ∎

Corollary 7.15.: Noetheryen bir halkada nilradikal nilpotent idealdir.

Kanıt: Önerme 7.14'de $I = (0)$ alalım. Nilradikal $\mathfrak{N} = r(I)$, için $\mathfrak{N}^m \subseteq I =$ olacak şekilde bir m vardır. $\mathfrak{N}^m = (0)$ olduğuna göre $\mathfrak{N}$ nilpotenttir. ∎

Corollary 7.16.: A Noetheryen halka, m maksimal ideal ve I herhangi bir ideal olsun. T.F.A.E.:

i) q m-primerdir.
ii) $r(q) = m$
iii) $m^n \subseteq q \subseteq m$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Kanıt: (i) ⇒ (ii) açıktır. (ii) ⇒ (i) (Önerme 4.2).

(ii) ⇒ (iii) (Önerme 7.14.), (iii) ⇒ (ii) ise radikalleri alarak kanıtlanır:
$$m = r(m^n) \subseteq r(q) \subseteq r(m) = m. \quad ∎$$

Önerme 7.17.: A Noetheryen halka ve $I \neq (1)$ bir ideal olsun. Bu durumda, I'ya ait olan asal idealler tam olarak $(I : x)$, $x \in A$ idealleri içinde asal olan ideallerdir.

Kanıt: A/I halkasına geçerek $I = (0)$ kabul edebiliriz.
$(0) = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$, $r(q_i) = p_i$, (0) idealinin bir primer ayrışımı olsun.

Bu durumda, $I_i = \bigcap_{j\neq i} q_j \neq (0)$, $\forall i = 1, \dots, n$, olur. Şimdi, Teorem 4.5'in kontinden $r(Ann(x)) = p_i$, her $x \in I_i, x \neq 0$, için elde edilir. Dolayısıyla, her $0 \neq x \in I_i$ için $Ann(x) \subseteq p_i$ olur.

Ayrıca, q_i ideali p_i-primer olduğu için Önerme 7.14'den dolayı $p_i^m \subseteq q_i$ olacak şekilde bir m vardır. Dolayısıyla, $I_i p_i^m \subseteq I_i \cap p_i^m \subseteq I_i \cap q_i = (0)$ elde edilir. m tamsayısını $I_i p_i^m = (0)$ koşulunu sağlayan en küçük sayı olarak seçelim. Bir $0 \neq x \in I_i p_i^{m-1}$ seçelim. O zaman, $x p_i = 0$ ve dolayısıyla, $p_i \subseteq Ann(x)$ olur. Bir önceki paragrafın sonucu ile karşılaştırınca, $Ann(x) = p_i$ elde edilir.

Tersine, eğer $Ann(x) = p$ bir asal ideal ise $r(Ann(x)) = p$ ve dolayısıyla, yine Teorem 4.5'den dolayısıyla p ideali (0) idealine ait bir asal idealdir. ■

Bölüm 8. Artin Halkaları:

İdealler için azalan zincir koşulunu (d.c.c) sağlayan bir halkaya Artin halka denir. Noetherian halkalarla, tanımı gereği, simetrik olsa da, çok daha az öneme sahiptir. Bu kitapta ele alınma sebepleri ise basit olmalarıdır.

Önerme 8.1.: Bir Artin halkada her asal ideal maksimaldir.

Kanıt: $p \subseteq A$ asal olsun. Bu durumda, $B = A/p$ Artin tamlık bölgesidir. $0 \neq x \in B$ alalım. d.c.c. koşulundan dolayı $(x^n) = (x^{n+1})$ olacak şekilde bir n vardır. Dolayısıyla, $x^n = x^{n+1}y$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. B tamlık bölgesi ve $x \neq 0$ olmadığı için
$x^n(1 - xy) = 0$ eşitliğinden $xy = 1$ elde ederiz. Başka bir değişle B bir cisimdir. Bu kanıtı tamamlar. ∎

Sonuç 8.2.: Artin halkalarda nilradikal ve Jacobson radikali birbirine eşittir.

Önerme 8.3.: Bir Artin halka sadece sonlu maksimal ideale sahiptir.

Kanıt: Artin A halkasının maksimal ideallerinin sonlu kesişimlerinin kümesini ele alalım. Halka Artin olduğu için bu kümenin minimal elemanı vardır, diyelim ki $m_1 \cap \dots \cap m_n$ olsun. Bu durumda, her maksimal m için $m \cap m_1 \cap \dots \cap m_n = m_1 \cap \dots \cap m_n$ olur. Buna göre $m_1 \cap \dots \cap m_n \subseteq m$ ve dolayısıyla Önerme 1.11'den dolayı $m_i \subseteq m$ olacak şekilde bir m_i vardır. Her iki ideal de maksimal olduğu için $m = m_i$ olmalıdır. Başka bir değişle A'nın maksimal idealleri sadece $m_1, m_2, \dots, m_n$'dir. ∎

Önerme 8.4.: Bir Artin halkada nilradical nilpotent halkadır.

Kanıt: $\mathfrak{N}$ nilradikal olmak üzere $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1}$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^k=\mathfrak{N}^{k+1}=\cdots$ olsun. Diyelim ki, $I\neq 0$ olsun. Σ ile $I\mathfrak{J}\neq 0$ koşulunu sağlayan tüm ideallerin kümesini düşünelim. $I\in\Sigma$ olduğu için Σ boş değildir. Yine d.c.c. koşulundan dolayı Σ kümesinin bir minimal elemanı vardır. $K\in\Sigma$ böyle bir minimal eleman olsun. O halde, $xI\neq 0$ olacak şekilde bir $x\in K$ elemanı vardır. K minimal olduğu için $K=(x)$ olmalıdır. Fakat, $(xI)I=xI^2=xI\neq 0$ ve $xI\subseteq(x)$ olduğu için $xI=(x)$ olur (yine K'nın minimalliğini kullanıyoruz.) O halde, $x=xy$ olacak şekilde bir $y\in I$ vardır. Buradan $x=xy=xy^2=\cdots=xy^n=\cdots$ elde ederiz. Fakat, $y\in I=\mathfrak{N}^k\subseteq\mathfrak{N}$ olduğu için y nilpotenttir.

Başka bir deyişle $y^n=0$ olacak şekilde n vardır. Dolayısıyla, $x=xy^n=x.0=0$ çelişkisine varırız. Bu kanıtı tamamlar. ∎

$p_i\subseteq A$ asal olmak üzere $p_0\subset p_1\subset\cdots\subset p_n$ (kesin artan) dizisine uzunluğu n olan zincir denir. Bir halkanın boyutu bu dizilerin en uzununun uzunluğu olarak tanımlanır. Dolayısıyla, bu uzunluk $+\infty$ da olabilir. Bir cismin uzunluğu 0, $\mathbb{Z}$'nin uzunluğu ise 1'dir.

<u>Teorem 8.5.</u>: A Artin halkadır $\Longleftrightarrow$ A Noetheryan halkadır ve boyutu sıfırdır.

<u>Kanıt:</u> ($\Longrightarrow$) Önerme 8.1.'e göre $\dim A=0$ olur. m_i, $i=1,\ldots,n$, A nın tüm maksimal idealleri olsun (Önerme 8.3). Bu durumda

$$\prod_{i=1}^{n} m_i^k\subseteq\left(\bigcap_{i=1}^{n} m_i\right)^k=\mathfrak{N}^k=0 \text{ olacak şekilde bir } k$$

tamsayısı vardır (Önerme 8.4). O halde, Sonuç 6.11'den dolayı A Noetheryendir.

($\Longleftarrow$) Teorem 7.13'den dolayı (0) idealinin prime ayrışımı vardır. Dolayısıyla, A sonlu sayıda minimal asal ideale sahiptir. $\dim A=0$

olduğu için bu ideallerin hepsi maksimaldir. $\eta = \bigcap_{i=1}^{n} m_i$ olsun. Sonuç 7.15'den dolayı $\eta^k = 0$ olacak şekilde bir k vardır. O halde, $0 = \prod m_i^k$ olur. Şimdi, göre Sonuç 6.11'e göre A bir Artin halkadır. ∎

Hatırlatma: A bir yerel Artin halka olsun. Bu durumda A'nın tek bir asal ideali vardır. Ayrıca, nilradikali de bu tek m asal (ve maksimal) idealdir. Önerme 8.4'e göre bu maksimal ideal $\eta = m$ nilpotenttir. Dolayısıyla, A'nın her elemanı ya birimdir ya da nilpotenttir.

Önerme 8.6.: A Noetheryan yerel halka ve m onun maksimal ideali olsun. Bu durumda aşağıdakilerden sadece biri doğrudur:

i) $m^n \neq m^{n+1}$, $\forall n = 1, 2 \ldots$

ii) $m^n = 0$ olacak şekilde bir n vardır ve A Artin yerel halkadır.

Kanıt: Diyelim ki $m^n = m^{n+1}$ olacak şekilde bir n olsun. Bu durumda Nakayama Lemma (2.6.)'dan dolayı $m^n = 0$ olur. $p \subseteq A$ herhangi bir asal ideal olsun. $m^n = 0 \subseteq p$ olduğu için

$m = r(m^n) \subseteq r(p) = p$ ve dolayısıyla $m = p$ olur. Dolayısıyla, m A'nın tek asal idealidir. Başka bir deyişle $\dim A = 0$ dır. A ayrıca Noetheryan olduğu için A Artin halkadır (Teorem 8.5.). ∎

Teorem 8.7.: (Artin Halkaların Yapı Teoremi)

Her Artin halka sonlu adet yerel Artin halkanın çarpımına izomorfiktir ve bu yazım tekdir.

Kanıt: A bir Artin halka ve $m_1, \ldots, m_n$ A'nın tüm (asal) maksimal idealleri olsun. Teorem 8.5'in kanıtından dolayı $\prod_{i=1}^{n} m_i^k = 0$ olacak şekilde bir k vardır.

Önerme 1.16'dan dolayı m_i^k aralarında asaldır ve bu yüzden $\bigcap_{i=1}^{n} m_i^k = \prod_{i=1}^{k} m_i^k$ (Önerme 1.10) olur. Şimdi yine Önerme 1.10 gereği $A \to \prod_{i=1}^{n} A/m_i^k$ bir izomorfizmadır. Her A/m_i^k bir Artin yerel halkadır.

Şimdi de bu yazımın "tek" olduğunu gösterelim.

Diyelim ki, $A \cong \prod_{i=1}^{m} A_i$ ve her A_i yerel Artin halka olsun.

$\phi_i : A \to A_i$, i.'inci izdüşüm fonksiyonu örtendir. $I_i = \ker \phi_i$ olarak tanımlansın. Yine Önerme 1.10'dan dolayı bu idealler aralarında asaldırlar ve $\bigcap I_i = (0)$'dır. q_i A_i'nin tek asal (maksimal) ideali ve $p_i = \phi_i^{-1}(q_i)$ olsun. p_i idealleri de asal ve Önerme 8.1'den dolayı maksimaldirler. Ayrıca Önerme 8.6'dan dolayı her q_i nilpotent olduğu için I_i ideali p_i-primerdir ve dolayısıyla $\bigcap I_i = (0)$ primer ayrışımıdır. I_i idealleri aralarında asal olduğu için p_i'lerde aralarında asaldır ve bu yüzden (0) idealinin izole asal idealleridir. Dolayısıyla, tüm I_i primer bileşenler izoledir ve bu yüzden A tarafından tek bir şekilde belirlenmişlerdir (Teorem 4.11, 2. Teklik Teoremi). Sonuç olarak $A_i \cong A/I_i$, A tarafından tek bir şekilde belirlenmişlerdir. ∎

<u>Örnek</u>: Sadece bir asal ideali olan bir halka Noetheryen olmak zorunda değildir, dolayısıyla Artin halka da olamaz: $A = k[x_1, x_2, \ldots]$ ve $I = (x_1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots)$ ideali olsun. $B = A/I$ halkasının tek bir asal ideali vardır ve $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ idealinin görüntüsüdür. Dolayısıyla, B local halkadır ve $\dim B = 0$ dır. Fakat, B'nin tek asal ideali sonlu üretilen bir ideal olmadığı için Noetheryen değildir.

A yerel halka, $m \subseteq A$'nın tek asal (maksimal) ideali ve $k = A/m$ cismi olsun. m/m^2 A-modülü aslında $k = A/m$-modül dolayısıyla k-vektör uzayıdır. Eğer m sonlu üretilmiş ise m/m^2 k-vektör uzayı da sonlu boyutlu olacaktır.

Önerme 8.8.: A yerel Artin halkası olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) Her ideal tek bir elemanla üretilir.
ii) A'nın maksimal ideali tek bir elemanla üretilir.
iii) $\dim_k(m/m^2) \leq 1$.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) yönleri aşikardır.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Eğer $\dim_k(m/m^2)=0$ ise $m.m=m$ olur.

Bu durumda, Nakayama Lemma'dan dolayı $m=0$ elde edilir. Dolayısıyla, A bir cisim olur ve kanıt tamamlanır.

O halde, $\dim_k(m/m^2)=1$ olsun. Bu durumda Önerme 2.8. kanıtı bitirir ($M=m$ alın). Şimdi, $m=(x)$ alalım. $I \neq (0)$ ve $I \neq (1)=A$ olan bir ideal olsun. $m=\mathfrak{N}$ nilradikali nilpotent olduğu için (Önerme 8.4.) $I \subseteq m^r$, $I \not\subseteq m^{r+1}$ olacak şekilde bir r vardır. Başka bir deyişle $y=ax^r \notin (x^{r+1})$ olacak şekilde bir $y \in I$ elemanı vardır. O halde, $a \notin (x)$ olduğu için birim elemandır ve dolayısıyla, $x^r \in I$. Buradan, $m^r=(x^r) \subseteq I \subseteq m^r$ ve dolayısıyla $I=m^r=(x^r)$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. ∎

Örnekler: $\mathbb{Z}/(p^n)$, (p asal) ve $k[x]/(f^n)$ (f indirgenemez) halkaları yukarıdaki önermenin koşullarını sağlar.

Diğer yandan $k[x^2,x^3]/(x^4)$ yerel Artin halkası için m halkası x^2 ve x^3 ile üretilir. $m^2=0$ ve $\dim_k(m/m^2)=2$ olur.

Bölüm 9: Ayrık Derecelendirme Halkaları ve Dedekind Bölgeleri

Dedekind Bölgeleri, sayılar teorisinin çarpanlara ayrılma konusu ile tekilliği olmayan (düzgün) eğrilerin fonksiyon halkaları bahsinde ortaya çıkarlar. Dedekind bölgesinin tanımını vermeden önce boyutu bir olan Noetheryen tamlık bölgelerini inceleyeceğiz. Bu anlamda, bir önceki bölümde ele aldığımız boyutu sıfır olan Noetheryen halkaların (Artin Halkaları) bir sonraki aşaması olarak görülebilirler.

Önerme 9.1.: A boyutu bir olan Noetheryen (tamlık) bölgesi olsun. Bu durumda, A'nın her ideali radikalleri farklı olan asal ideallerin çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabilir.

Kanıt: A Noetheryen olduğu için verilen bir $I \neq 0$ ideali q_i'ler p_i-primer olmak üzere $I = \cap q_i$ minimal primer ayrışıma sahiptir. $\dim A = 1$ ve A tamlık bölgesi olduğu için A'nın her asal ideali maksimaldir. Dolayısıyla, her p_i maksimaldir ve p_i'ler aralarında asaldır. Şimdi Önerme 1.16'dan dolayı q_i'ler de aralarından asal olurlar ve Önerme 1.10'dan dolayı da $\prod q_i = \cap q_i$ olur. O halde, $I = \prod q_i$ elde edilir.

Tersine, eğer $I = \prod q_i$ ise benzer bir argüman $I = \cap q_i$ olduğunu gösterir ve dolayısıyla, I'nın minimal bir primer ayrışımını elde etmiş oluruz. Ayrıca, her bir q_i İzole bir primer bileşen olduğu için Sonuç 4.11'den dolayı ayrışım tektir. ∎

A boyutu bir olan Noetheryen bölge olsun, öyle ki her primer ideal bir asalın kuvveti olsun. O halde, yukarıdaki önermeden dolayı, sıfırdan farklı her ideal asalların çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabilir:

$$I = q_1 \cdots q_n = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}.$$

Eğer A halkasını herhangi bir $p \neq 0$ asal idealinde yerelleştirirsek (localize), A_p yerel halkası da A ile aynı koşulları sağlar. Dolayısıyla, her ideal A_p'nın maksimal idealinin bir kuvveti olur.

Şimdi bu tip halkaların başka karakterizasyonlarını göreceğiz.

Ayrık Derecelendirme Halkaları:

K bir cisim olsun. K üzerinde bir ayrık derecelendirme halkası ile aşağıdaki koşulları sağlayan bir örten $v: K^* \to \mathbb{Z}$ ($K^* = K - \{0\}$) fonksiyonu anlayacağız:

1) $v(xy) = v(x) + v(y)$ (dolayısıyla v bir homomorfizmdir)

2) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

$0 \in K$ ve $v(x) \geq 0$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu alt kümeye v'nin derecelendirme halkası denir. Bu K'nın bir derecelendirme halkasıdır. Bazen $v(0) = +\infty$ yazarak v'yi tüm K'ya genişleteceğiz.

Örnekler: 1) $K = \mathbb{Q}$, $v_p: K^* \to \mathbb{Z}$, $v_p(x) = a$ olarak tanımlansın öyle ki, $x = p^a r/s$, $(r, p) = 1 = (s, p)$ (p sabit bir asal sayı olmak üzere).

Bu durumda, v_p'nin derecelendirme halkası $\mathbb{Z}_{(p)}$ yerel halkasıdır.

2) $K = k[x]$, k cisim, x bilinmeyen. $f \in K[x]$ indirgenemez bir polinom olmak üzere yukarıdaki örneği p yerine f ile yapabiliriz.

Bir A tamlık bölgesi bir $v: K^* \to \mathbb{Z}$ ayrık derecelendirmenin (derecelendirme) halkası ise A'ya ayrık derecelendirme halkası denir. Önerme 5.18'e göre A bir yerel halkadır, ve m maksimal ideali $x \in K$, $v(x) > 0$ koşulunu sağlayan elemanlardan oluşur.

Eğer A'nın x, y elemanları için $v(x) = v(y)$ ise $v(xy^{-1}) = 0$ olduğu için $u = xy^{-1} \in A \setminus m$, birim eleman olur ve dolayısıyla $(x) = (y)$'dir.

Eğer $I \subseteq A$, $I \neq 0$, bir ideal ise $x \in I$, $v(x) = k$ olacak şekilde en küçük tam sayı vardır. Dolayısıyla, $v(I) = [k, \infty)$ olur. Buradan, A'nın tüm ideallerinin, $k \geq 0$ olmak üzere, $m_k = \{y \in A \mid v(y) \geq k\}$ şeklinde olduğunu görürüz. Bu ideallar $m \supseteq m_2 \supseteq m_3 \supseteq \cdots$ şeklinde bir zincir oluşturacakları için, A halkası Noetheryandır.

Ayrıca, $v: K^* \to \mathbb{Z}$ örten olduğu için $m(x) = 1$ olacak şekilde $x \in m$ vardır ve dolayısıyla $m = (x)$ ve $m_k = (x^k)$ olur. O halde, m A'nın tek asal idealidir ve bu yüzden A boyutu bir olan Noetheryan yerel halkadır. Ayrıca, bu halkanın sıfırdan farklı her ideali m'nin kuvvetleridir.

<u>Önerme 9.2.</u>: A boyutu bir olan Noetheryan yerel bölge, m A'nın maksimal ideali ve $k = A/m$ kalanlar cismi olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar denktir:

i) A bir ayrık derecelendirme halkasıdır.
ii) A integral kapalıdır.
iii) m ideali tek eleman tarafından üretilir.
iv) $\dim_k(m/m^2) = 1$
v) Sıfırdan farklı her ideal m'nin kuvvetidir.
vi) $x \in A$ vardır öyle ki, her ideal (x^k) şeklindedir.

<u>Kanıt.</u> İlk önce iki gözlemi sunacağız:

A) Eğer $I \neq (0)$, $I \neq (1)$ bir ideal ise, I m-primerdir ve $m^n \subseteq I$ ve $m^{n+1} \nsubseteq I$ olacak şekilde bir n vardır.

Bunu şöyle görebiliriz. A Noetheryan olduğu için I'nın minimal primer ayrışımı vardır, $I = \cap q_i$ ve her $r(q_i) = m$, çünkü m A'nın tek asal idealidir. Her bir q_i için $m^{n_i} \subseteq q_i$ olacak şekilde bir n_i olduğu için (Sonuç 7.16) $I = \bigcap_i q_i \supseteq \bigcap_i m^{n_i} = m^{n_0}$, $n_0 = \max\{n_i\}$ olur.

B) $m^n \neq m^{n+1}$, $\forall n \geq 0$ (Önerme 8.6., $\dim A = 1$, A Artin değildir.)

(i) $\Rightarrow$ (ii) (Önerme 5.18)

(ii) ⇒ (iii): $0 \neq a \in m$ alalım. (A)'dan dolayı, $m^n \subseteq (a)$, $m^{n-1} \not\subseteq (a)$ olacak şekilde bir n sayısı vardır. $b \in m^{n-1} \setminus (a)$ seçelim. $x = a/b \in K = A_{(0)}$ olsun. $b \notin (a)$ olduğu için $x^{-1} = b/a \notin A$ olur. A integral kapalı olduğu için $x^{-1} \in K$ A üzerinde integral olamaz. Eğer $x^{-1}m \subseteq m$ olsaydı m sadık bir $A[x^{-1}]$-modül ve sonlu üretilen A-modül olurdu. Fakat $x^{-1}m \subseteq A$ olduğu için $x^{-1}m = A$ ve dolayısıyla $m = Ax = (x)$ olur.

(iii) ⇒ (iv). Önerme 2.8'den dolayı $\dim_k(m/m^2) \leq 1$ olur. O halde (B)'den de $m/m^2 \neq 0$ olur.

(iv) ⇒ (v). $I \neq (0)$ ve $I \neq (1)$ olan bir ideal olsun. (A)'dan dolayı $m^n \subseteq I$ olacak şekilde bir n vardır. Şimdi Önerme 8.8.'i A/m^n halkasına uygulayarak kanıt tamamlanır.

(v) ⇒ (vi) (B)'den dolayı $m \neq m^2$ dir ve dolayısıyla $x \in m$ ve $x \notin m^2$ olacak şekilde bir x vardır. Hipotezden dolayı $(x) = m^r$ olduğu için $r = 1$, $(x) = m$ ve $(x^k) = m^k$ elde edilir.

(vi) ⇒ (i). $m = (x)$ olacak şekilde bir x seçelim. (B)'den dolayı $(x^k) \neq (x^{k+1})$ olur. $I \subseteq A$, $I \neq (0)$ bir ideal olsun. Yine hipotezden dolayı $I = (x^k)$ olacak şekilde tek bir k vardır. $v(a) = k$ olarak tanımlansın ve v K^*'a $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$ ile genişletilsin. v'nin iyi tanımlı bir ayrık derecelendirme ve A'nın da v'nin derecelendirme halkası olduğu kolayca görülür. ∎

Dedekind Bölgeleri

Teorem 9.3.: Bir boyutlu bir A Noetherian bölge için aşağıdaki koşullar denktir:

i) A integral kapalıdır.
ii) A'nın her ideali bir asalın kuvvetidir.
iii) Her A_p $(p \neq 0)$ yerel halkası ayrık değerlendirme halkasıdır.

Bu özellikleri sağlayan halkalara Dedekind Bölgesi denir.

Kanıt: (i) ⇔ (iii) Önerme 9.2 ve 5.13'den elde edilir.

(ii) ⇔ (iii) Önerme 9.2'yi ve prime idealler ile ideallerin kuvvetlerinin yerelleştirme altında "iyi davranışı"nı kullanarak kanıtlanır (Önerme 3.11 ve 4.8.) ∎

Sonuç 9.4.: Dedekind bölgesinin her ideali asal ideallerin çarpımı olarak tek şekilde yazılabilir.

Kanıt: Önerme 9.1 ve Teorem 9.3. ∎

Örnekler: 1) A bir esas ideal bölgesi olsun. Her ideal bir eleman tarafından üretildiği için A Noetheryendir. Ayrıca sıfırdan farklı her asal ideal maksimaldir: $p \subseteq A$ asal ve $p \subseteq m \subseteq A$ maksimal ideal olsun. $m=(x)$ ve $p=(y)$ ise $y=xz$ olmalıdır. $xz \in p$ olduğu için $x \in p$ veya $z \in p$ olur. $x \in p$ ise $m=p$ olur. $z \in p$ ise $z = yw \Rightarrow z = yw = xzw \Rightarrow xw = 1$ elde edilir. O halde, $m=(x)=A$ çelişkisi elde edilir. O halde, $x \in p$ ve $m=p$ olur. Başka bir deyişle $\dim A = 1$'dir.

Ayrıca, her $A_{(p)}$ yerel halkası da esas ideal bölgesidir. Şimdi Önerme 9.2'den dolayı $A_{(p)}$ ayrık değerlendirme halkasıdır. Son olarak Teorem 9.3'den dolayı A Dedekind bölgesidir.

2) K cebirsel bir sayı cismi olsun ($\mathbb{Q}$'nun sonlu cebirsel genişlemesi). A ise $\mathbb{Z}$'nin K içindeki integral kapanışı olsun. (Örneğin, $K=\mathbb{Q}(i)$ ise $A=\mathbb{Z}[i]$ olur.) Bu durumda, A Dedekind bölgesidir:

Teorem 9.5.: Cebirsel bir sayı cisminin sayı halkası Dedekind bölgesidir.

Kanıt: $\mathbb{Q}$'nun karakteristiği sıfır olduğu için K $\mathbb{Q}$'nun ayrılabilir (seperable) genişlemesidir. O halde, Önerme 5.17'den dolayı K'nın $\mathbb{Q}$ üzerinde bir $v_1, \dots, v_n$ sonlu tabanı vardır ve $A \subseteq \sum \mathbb{Z} v_i$ olur. Dolayısıyla, A sonlu üretilen bir $\mathbb{Z}$-modüldür ve dolayısıyla Noetheryandır. Sonuç 5.5'e göre A integral kapalıdır. Kanıtı tamamlamak için dım $A=1$ olduğunu (her asalın maksimal olduğunu) göstermeliyiz. $(0)\neq p\subseteq A$ bir asal ideal olsun. Sonuç 5.9.'a göre $p\cap\mathbb{Z}\neq(0)$'dır. Dolayısıyla, $p\cap\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ içinde maksimaldir. Şimdi Sonuç 5.8.'e göre $p\subseteq A$ maksimaldır. ■

Kesirli İdealler:

A bir tamlık bölgesi ve $K=A_{(0)}$, kesirler cismi olsun. K'nın bir M A-alt modülü için $xM\subseteq A$ olacak şekilde bir $0\neq x\in A$ varsa, M'yi A'nın kesirli ideali denir. $x=1$ alırsak, A'nın her idealinin kesirli ideal olduğunu görürüz. Bu ideallere integral ideal denir. Her $u\in K$ elemanı için $(u)=Au$ bir kesirli idealdir. Böyle ideallere esas ideal diyeceğiz. M bir kesirli ideal ise $(A:M)$ kümesi şöyle tanımlanır:

$$(A:M)=\{x\in K \mid xM\subseteq A\}.$$

Sonlu üretilen her A-modül $M\subseteq K$ kesirli idealdir: $x_1,\dots,x_n\in K$ M'nin üreteçleri ise $x_i=y_i/z_i$, $i=1,\dots,n$, $y_i, z_i\in A$ yazalım. $z=z_1\cdots z_n\in A$ olsun. Öyleyse

$x_i=\tilde{y}_i/z$, $i=1,\dots,n$, olur. O halde, $zM\subseteq A$ olur.

Tersine, eğer A Noetherian ise, her kesirli ideal sonlu üretilir çünkü bu ideal $x^{-1}I$, $I\subseteq A$, şeklindedir.

K'nın bir M A-alt modülü için $MN=A$ olacak şekilde bir A-altmodül N varsa, M'ye tersi olan ideal denir. Bu durumda $N=(A:M)$ dır ve dolayısıyla tektir:

$$N\subseteq(A:M)\subseteq(A:M)MN\subseteq((A:M)M)N\subseteq AN=N,$$
$$\Rightarrow N=(A:M).$$

O halde, M sonlu üretilen bir A-modüldür ve dolayısıyla kesirli idealdir: $M\cdot(A:M)=M\cdot N=A \Rightarrow \exists\, x_i\in M$ ve $y_i\in(A:M)$ öyle ki $1=\sum x_iy_i$ $(i=1,\dots,n)$. Dolayısıyla, her $x\in M$, $x=\sum_i (y_ix)x_i$, $y_ix\in A$, ve dolayısıyla, M $x_1,\dots,x_n$ ile üretilir.

Son olarak, her esas kesirli (u) idealinin tersi vardır, (u^{-1}), ve tüm bu idealler $(1)=A$ birim elemanı olan bir abelyen grup oluştururlar.

Aşağıdaki önermenin gösterdiği gibi tersi olmak yerel bir özelliktir:

<u>Önerme 9.6.</u>: Bir M kesirli ideali için aşağıdakiler denktir:

(i) M'nin tersi vardır.
(ii) M sonlu üretilmiştir ve her asal p ideali için M_p'nin tersi vardır.
(iii) M sonlu üretilmiştir ve her m maksimal ideali için M_m'nin tersi vardır.

<u>Kanıt</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii). $A_p = (M\cdot(A:M))_p = M_p\cdot(A:M)_p$ (Önerme 3.11 ve Sonuç 3.15).
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i). $I = M\cdot(A:M)$ olsun. $I \subseteq A$ bir idealdir. A'nın her maksimal m ideali için $I_m = M_m\cdot(A_m : M_m) = A_m$ (Önerme 3.11 ve Sonuç 3.15), çünkü kabul gereği M_m'nin tersi vardır. Dolayısıyla, $I \nsubseteq m$ dir. $m \subseteq A$ rastgele bir maksimal olduğu için $I = A$ olmalıdır. O halde,
$$A = I = M\cdot(A:M) \Rightarrow M\text{'nin tersi vardır.}$$

<u>Önerme 9.7.</u>: A yerel bölge olsun. Bu durumda, A'nın ayrık derecelendirme bölgesi olması için gerek ve yeter koşul A'nın sıfırdan farklı her kesirli idealinin tersinin olmasıdır.

<u>Kanıt</u>: ($\Rightarrow$) m A'nın tek maksimal ideali ve $m = (x)$ olsun (Önerme 9.2). $M \neq (0)$ bir kesirli ideal olsun. Bir $y \in A$ seçelim, öyle ki $yM \subseteq A$ olsun. O halde, $yM \subseteq A$ içinde bir idealdir. A yerel halkası ayrık derecelendirme bölgesi olduğu için $yM = (x^r)$ şeklindedir. O halde, $s = v(y)$ olmak üzere $M = (x^{r-s})$ olur.

($\Leftarrow$) Bu konunun başındaki 3. paragraftan dolayı, her idealin tersi olduğu için, her ideal sonlu üretilmiştir ve bu yüzden sonlu üretilmiştir. Başka bir deyişle A Noetheryen'dir. Bu sebeble kanıtı tamamlamak için her sıfırdan farklı idealin m'nin bir kuvveti olduğunu göstermek yeterlidir. Diyelim ki, bu doğru olmasın ve Σ m'nin kuvveti şeklinde yazılamayan ideallerin kümesi olsun. Bu kümedeki bir I_n zincirinin birleşimi $\bigcup I_n$ yine Σ içindedir. Aksi halde, $\bigcup I_n = m^k$ olurdu. m^k'nın sonlu üreteç kümesi bir I_n'nin içinde kalacağı için $I_n = m^k$ elde ederdik. O halde şimdi Zorn Lemma'dan dolayı Σ'nın bir maksimal elemanı vardır, diyelim ki I olsun. $I \neq m$ olduğu için $I \subsetneq m$ olur (A yerel halka!). Dolayısıyla, $m^{-1}I \subseteq m^{-1}m = A$, A'nın (1)'den farklı bir ideali olur. $mI \subseteq I$ olduğu için $I \subseteq m^{-1}I$ olur. Eğer $m^{-1}I = I$ ise $mI = I$ ve Nakayama Lemma'dan $I = 0$ elde ederdik. Dolayısıyla, $I \subsetneq m^{-1}I$ olurdu. I Σ içinde maksimal eleman olduğu için Σ'nın tanımından dolayı $m^{-1}I$ ideali m'nin bir kuvvetidir. Dolayısıyla, I m'nin bir kuvveti olur. Bu çelişki kanıtı tamamlar. ∎

Bu sonucun, yerel olmayan, genel hali şöyledir:

<u>Teorem 9.8.</u>: A tamlık bölgesi olsun. O zaman, A'nın Dedekind bölgesi olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı her kesirli idealinin tersinin olmasıdır.

<u>Kanıt:</u> ($\Longrightarrow$) $M \neq 0$ kesirli ideal olsun. A Noetheryen olduğu için M sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla, her asal $0 \neq p \subsetneq A$ ideali için $0 \neq M_p$, A_p ayrık derecelendirme halkası üzerinde kesirli idealdir (Önerme 9.7). Dolayısıyla M'nin de tersi vardır (Önerme 9.6.).

($\Longleftarrow$) Sıfırdan farklı her idealin tersi olduğu için, sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla, A Noetheryen'dir. Her $0 \neq p$ asalı için A_p'nin ayrık derecelendirme halkası olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 9.7.'den dolayı, A_p'nin her idealinin tersi olduğunu göstermek yeterlidir. $J \neq 0$ A_p'nin bir ideali olsun. $I = J^c = J \cap A$ olarak tanımlanırsa, O zaman, I'nın tersi vardır ve bu sebeble $J = I_{(p)}$'nın de tersi vardır (Önerme 9.7). Böylece kanıt tamamlanır.

Sonuç 9.9.: Eğer A bir Dedekind bölgesi ise, A'nın sıfırdan farklı kesirli idealleri çarpma altında bir grup oluştururlar.

Bu gruba, idealler grubu denir ve I ile gösterilir. Sonuç 9.4.'ün ışığında, bu idealler grubu asal ideallerin taban oluşturduğu serbest abelyen gruptur.

$K = A_{(0)}$ ve $K^* = K \setminus \{0\}$ ise $\phi : K^* \to I$, $\phi(u) = (u)$ bir homomorfizmadır. $P = \phi(K^*)$ görüntü kümesi kesirli esas ideallerden oluşur. $H = I/P$ grubuna A'nın ideal sınıf grubu ismi verilir. $\ker(\phi)$ ise $\{u \in K^* \mid (u) = (1)\}$, A'nın birim elemanlarından oluşur. Bu durumda aşağıdaki dizi tamdır:

$$1 \to U \to K^* \to I \to H \to 1.$$

Uyarı: K cebirsel sayı cismi ve A K'nın sayı halkası olsun. Teorem 9.5'e göre A bir Dedekind bölgesidir. Bu durumda, aşağıdakiler doğrudur:

1) H sonlu bir gruptur. $h = |H|$ sayısına K cisminin sınıf sayısı denir. Aşağıdaki ifadeler denktir: (i) $h=1$, (ii) $I = P$, (iii) A esas ideal bölgesidir, (iv) A tek şekilde çarpanlara ayrılma bölgesidir (UFD).

2) U sonlu üretilen değişmeli gruptur. Aslında U'nun üreteçlerini sayabiliriz. U'nun içindeki mertebesi sonlu olan elemanlar K'nın içinde kalan birimin kökleridir. Bu elemanlar U içinde sonlu devirli bir W altgrubu oluşturur. U/W'nin üreteç sayısı ise şöyle belirlenir: Eğer $(K:\mathbb{Q}) = n$ ise K'nın $\mathbb{C}$ içine n farklı, $K \to \mathbb{C}$, gömmesi vardır. Bunlardan r_1 tanesi K'yı $\mathbb{R}$'ye gönderir, geri kalanı ise K'yı $\mathbb{C}$'ye gönderir ($\mathbb{R}$'nin içinde kalmaz), diyelim ki $2r_2$ olsun (her $K \to \mathbb{C}$ gömme fonksiyonu için $K \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ fonksiyonu da bir gömmedir. Dolayısıyla,

$$n = r_1 + 2r_2 \text{ olur.}$$

U/W'nun üreteç sayısı ise $r_1 + r_2 - 1$ olur.

Bu sonuçların kanıtları cebirsel sayılar teorisinin konusudur.

<u>Örnekler:</u> 1) $K = \mathbb{Q}(i)$, $n=2$, $r_1=0$, $r_2=1$, $r_1+r_2-1=0$.

$A = \mathbb{Z}[i]$ birim elemanları birimin 4. kökleridir: $\pm 1, \pm i$.

2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $n=2$, $r_1=2$, $r_2=0$, $r_1+r_2-1=1$, $W=\{\pm 1\}$
$U/W \simeq \mathbb{Z}$.

Gerçektende, $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$'nin birim elemanları

$\pm(1+\sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{Z}$, sayılarıdır.

Bölüm 10. Tamlamalar.

Topolojiler ve Tamlamalar: G topolojik bir değişmeli grup olsun. Bu durumda, $\{0\}$ kümesinin kapalı olup olmaması, G'nin Hausdorff olup olmamasına denk gelecektir. Her $a \in G$ için $T_a : G \to G$, $T_a(x) = x+a$, fonksiyonları homeomorfizma olduğu için G üzerindeki topoloji $0 \in G$ elemanının komşulukları ile tamamen belirlenecektir.

Lemma 10.1.: H ile $0 \in G$ elemanının tüm komşuluklarının arakesitini gösterelim.

i) $H \leq G$, bir alt gruptur.

ii) $H = \overline{\{0\}}$

iii) G/H Hausdorff uzaydır.

iv) G Hausdorfftur $\Leftrightarrow$ $H=0$.

Kanıt: i) $H = \bigcap_{0 \in U} U$, $U \subseteq G$ açık. $x \in H$ alalım.

İddia: $0 \in U$ açık ise $0 \in T_x(U)$ olur.

Kanıt: $0 \notin T_x(U) = x+U$ olsaydı $x \notin -U$ olurdu. Fakat

$-U$ açık kümesi de 0 içerdiği için x sıfırı içeren bir açık kümenin içinde kalmazdı. Bu çelişki kanıtı tamamlar. ∎

Şimdi, $x, y \in H$ alalım. $y \in U$ olduğu için $x+y = T_x(y) \subseteq T_x(U)$ olur. $T_x(U)$ sıfırı içeren tüm açık kümeleri taradığı için $x+y \in \bigcap_{0 \in U} U = H$ olur. $x \in H$ ise $-x \in H$ olduğu da benzer şekilde görülür.

ii) $H = \{x \in G \mid 0 \in T_x(U), \forall U, 0 \in U \subseteq X \text{ açık}\}$.

$H \subseteq \{\dots\}$ yukarıdaki iddiada gösterildi. Şimdi, $x \in \{\dots\}$ alalım. $0 \in U \subseteq G$ herhangi bir açık olsun.

$y=-x\in H$ olduğu için $V=T_y(U)$ için $0\in V$ olur. O halde, $0=T_y(z)$ olacak şekilde $z\in U$ vardır. $0=y+z \Rightarrow x=-y=z\in U$ olur. U sıfırı içeren rastgele bir açık olduğu için $x\in H$ elde edilir.

$$H=\{x\in G \mid 0\in T_x(U),\ \forall U,\ 0\in U\subseteq X \text{ açık}\}.$$

Diyelim ki $y\notin H$ olsun. O zaman $0\notin y+U$ olacak şekilde bir $0\in U\subseteq X$ açık kümesi vardır. $y\in y+U$ ve $y+U$ açık küme olduğu için $0\in G\setminus\{y+U\}$ olur. Dolayısıyla, 0'ı içeren bir kapalı küme y elemanını içermiyor. O halde, $y\notin \overline{\{0\}}$ olur! Başka bir deyişle
$$\overline{\{0\}}\subseteq H \text{ olur.}$$

Şimdi, $x\in H$ alalım. $0\in K\subseteq G$ kapalı bir küme olsun. $-x\notin K$ ise $x+K$ sıfırı içermeyen kapalı bir küme olur. O halde, $U=G\setminus(x+K)$ sıfırın bir (açık) komşuluğudur. Dolayısıyla, $x\in U=G\setminus(x+K)$ olmalıdır. Fakat, $0\in K$ olduğu için $x\in x+K$ olur ve bu bir çelişkidir. O halde, $-x\in K$ elde edilir. Buradan, $-H\subseteq K \Rightarrow H=-H\subseteq K$ elde edilir. K sıfırı içeren rastgele bir kapalı küme olduğu için $H\subseteq\overline{\{0\}}$ olur. Dolayısıyla, $H=\overline{\{0\}}$ olmalıdır.

iii) Bu genel bir sonuçtur: Herhangi bir topolojik grup G Hausdorfftur ancak ve ancak $\{e\}$ kümesi G içinde kapalıdır.

G Hausdorff ise tek elemanlı kümeler kapalıdır ve dolayısıyla $\{e\}$ kapalıdır.

Tersine $\{e\}$ kümesinin kapalı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f:G\times G\to G$, $f(x,y)=x^{-1}y$, sürekli fonksiyonu için $f^{-1}(\{e\})$ kapalı kümesi $\Delta=\{(x,y)\mid x=y\}\subseteq G\times G$ köşegenidir. Bu ise G'nin Hausdorff olmasına denktir.

Bizim durumumuzda $H=\overline{\{0\}}\subseteq G$ kümesi kapalı olduğu için G/H bölüm uzayında noktalar kapalıdır ve bu yüzden kanıt tamamlanır.

iv) Yukarıdaki argüman bunu da kanıtlar.

$0\in G$ noktasının ve dolayısıyla her noktanın sayılabilir bir tabanı olduğunu kabul edeceğiz (1. Sayılabilir uzay) Bu durumda, G'nin tamlamasını, $\hat{G}$ ile göstereceğiz, Cauchy dizileri yardımıyla tanımlayabiliriz. Bir (x_ν) dizisi şu koşulu sağlıyorsa ona Cauchy dizisi denir: Verilen her $0\in U$ komşuluğu için öyle bir $s(U)\in\mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $u,v\geq s(U)$ için $x_u-x_v\in U$ olur. İki $(x_\nu),(y_\nu)$ Cauchy dizisine denktir denir, eğer $x_\nu-y_\nu\to 0$ ise. Cauchy dizilerinin denklik sınıflarının kümesine G'nin tamlaması denir ve $\hat{G}$ ile gösterilir.

$\phi: G\to\hat{G}$, $\phi(x)=(x)$, sabit dizi, fonksiyonu bir

homomorfizmadır ve $\ker\phi=\cap U=H=\overline{\{0\}}$ alt grubudur. Dolayısıyla, ϕ'nin bire bir olması için gerek ve yeter şart G'nin Hausdorff olmasıdır.

Eğer $f: G_1\to G_2$ değişmeli grupların sürekli homomorfizması ise bu fonksiyon bir $\hat{f}:\hat{G}_1\to\hat{G}_2$ fonksiyonu belirler. $\hat{f}([x_\nu])\doteq[f(x_\nu)]$, öyle ki aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"'] & G_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ \hat{G}_1 \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{G}_2 \end{tikzcd}.$$

Ayrıca, $G_1\xrightarrow{f}G_2\xrightarrow{g}G_3$ ise $\widehat{(g\circ f)}=\hat{g}\circ\hat{f}$ olur.

<u>Örnek:</u> $G=(\mathbb{Q},|\cdot|)$ ise $\hat{G}=(\mathbb{R},|\cdot|)$ olur.

Şimdi daha değişik topolojileri ele alalım:

$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_n\supseteq\cdots$ alt grup dizisi olsun.

Bir $U\subseteq G$ kümesine 0'ın komşuluğu diyeceğiz, eğer $G_n\subseteq U$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}$ varsa.

<u>Örnek</u> (p-adic topoloji). $p\in\mathbb{Z}$ herhangi bir asal olsun ve $G_n=p^n\mathbb{Z}$ olarak verilsin $(G=G_0=\mathbb{Z})$.

Her bir G_n hem açık küme olduğu gibi aynı zamanda kapalıdır: $G=\bigcup_{i\in\Lambda} g_i+G_n$, sol kosetlerin ayrık birleşimi olduğu ve her bir $g_i+G_n=T_{g_i}(G_n)$ açık olduğu için $G_n^c=\bigcup_{\substack{i\in\Lambda\\ g_i\neq 0}} g_i+G_n$ kümesi açıktır ve dolayısıyla G_n kapalıdır.

G üzerindeki topolojinin alt grup dizisi ile verildiği durumda tamlamanın cebirsel bir alternatif tanımı vardır:

Eğer (x_ν) G içinde bir Cauchy dizisi olsun. Verilen her G_n için öyle bir n_0 vardır ki $k,l\geq n_0$ için $x_k-x_l\in G_n$ ve dolayısıyla $\bar{x}_k-\bar{x}_l=0\in G/G_n$ olur. Başka bir deyişle (x_ν) dizisinin G/G_n içindeki görüntüsü bir noktadan sonra sabit dizi olacaktır. O sabit elemana $\xi_n\in G/G_n$ diyelim. $\theta_{n+1}: G/G_{n+1}\to G/G_n$ doğal fonksiyon ile $\xi_{n+1}=\theta_{n+1}(\xi_n)$ eşitliği sağlanır.

Dolayısıyla (x_ν) Cauchy dizisi yerine (ξ_n) "coherent" dizisini düşünebiliriz. Böylece, $\hat{G}$ tam uzayı (ξ_n) "coherent" diziler uzayı olarakda tanımlanabilir.

Bu yaklaşım ters limitin özel bir halidir: $\{A_n\}$,

$\theta_{n+1}: A_{n+1}\to A_n$ abelyen gruplar ve grup homomorfizmaları dizisi olsun. (a_n), $a_n\in A_n$ ve $\theta_{n+1}(a_{n+1})=a_n$ koşulunu sağlayan dizilere "coherent" diziler denir ve bu tür dizilerin kümesi $\varprojlim A_n$ ile gösterilir.

Dolayısıyla, bizim durumumuzda, $\hat{G}=\varprojlim G/G_n$ olur.

Bu tanımın birçok avantajı mevcuttur.
Genel bir ters sistemde $\theta_{n+1}: A_{n+1}\to A_n$ örten olmasa da bizim durumumuzda, $G/G_{n+1}\to G/G_n$, örten olacaktır. Bu tür sistemlere örten ters sistem denir.

$\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}$ ters sistemleri aşağıdaki değişmeli tam dizileri oluştursunlar:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & C_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad : \; 0 \to \{A_n\} \to \{B_n\} \to \{C_n\} \to 0$$

Bu dizi bize $0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$ dizisini verir.

<u>Önerme 10.2.</u>: $0 \to \{A_n\} \to \{B_n\} \to \{C_n\} \to 0$ dizisi tam ise $0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$ dizisi de tamdır.

Bu dizi aynı zamanda örten ise
$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$ dizisi tamdır.

<u>Kanıt:</u> $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $d^A : A \to A$, $d^A(a_n) = a_n - \theta_{n+1}(a_{n+1})$ olarak tanımlansın.
Önermenin hipotezi bize

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "d^A"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "d^B"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "d^C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tam dizisini verir. Şimdi Önerme 2.10 bize
$0 \to \operatorname{Ker} d^A \to \operatorname{Ker} d^B \to \operatorname{Ker} d^C \to \operatorname{Coker} d^A \to \operatorname{Coker} d^B \to \operatorname{Coker} d^C \to 0$
tam dizisini verir.

Kanıtı tamamlamak için "$\{A_n\}$ örten $\Rightarrow d^A$ örten" ifadesini kanıtlamak yeterlidir. d^A'nın örtenliği verilen bir (a_n) dizisi için $x_n - \theta_{n+1}(x_{n+1}) = a_n$ koşulunu sağlayan bir (x_n) dizisi bulmamız yeterlidir. $\theta_{n+1}(x_{n+1}) = x_n - a_n$ ve θ_{n+1} örten olduğu için (x_n) dizisi tümevarım ile kolayca bulunur. ■

<u>Sonuç 10.3.</u> $0 \to G' \to G \xrightarrow{p} G'' \to 0$ tam dizi olsun. G üzerinde bir $\{G_n\}$ alt dizi topolojisi alalım. G' ve G'' üzerinde de $\{G_n \cap G'\}$ ve $\{p(G_n)\}$ dizilerinin topolojilerini düşünelim. Bu durumda,
$0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$ dizisi tamdır.

<u>Kanıt:</u> Önerme 10.2'yi $0 \to G'/G' \cap G_n \to G/G_n \to G''/pG_n \to 0$ ters sistem tam dizisine uygulamak yeterlidir. ■

Yukarıdaki sonuçta $G' = G_n$ alırsak $G'' = G/G_n$ üzerindeki topoloji ayrık topoloji olur. Dolayısıyla, $\hat{G}'' = G''$ elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz:

<u>Sonuç 10.4.</u>: $\hat{G}_n \leq \hat{G}$ alt gruptur ve $\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n$ dir.

Ayrıca bu eşitliğin limitini alırsak

$$\hat{\hat{G}} = \varprojlim \hat{G}/\hat{G}_n \cong \varprojlim G/G_n = \hat{G} \text{ elde ederiz.}$$

<u>Önerme 10.5.</u>: $\hat{\hat{G}} \cong \hat{G}$.

Eğer $\phi: G \to \hat{G}$ fonksiyonu izomorfizma ise (G Hausdorff olmalı) G'ye tam uzay denir. Önerme 10.5.'e göre $\hat{G}$ tam uzaydır.

<u>Örnekler</u>: 1) A bir halka ve $I \subseteq A$ bir ideal olsun. Bu durumda, $G = (A, +)$ ve $G_n = I^n$ alabiliriz. Bu şekilde A üzerine konulan topolojiye I-adik topoloji denir. A ise topolojik halka adını alır. Önerme 10.1'e göre bu topoloji ancak $\cap I^n = (0)$ olması durumunda Hausdorfftur.

i) Bir örnek olarak $A = k[x]$ ve $I = (x)$ alırsak, $\hat{A} = k[[x]]$, formel kuvvet serileri halkası olur.

ii) Bir diğer örnek olarak $A = \mathbb{Z}$, $I = (p)$, p bir asal alabiliriz. Bu durumda, $\hat{A}$ p-adik tam sayıların halkası olur. $\hat{A}$'nın elemanları $\sum_{n=0} a_n p^n$, $0 \leq a_n \leq p-1$, şeklindeki formel kuvvet serileridir.
Bu topolojiye göre $n \to \infty$ iken $p^n \to 0$.

2) Benzer şekilde M bir A-modül, $I \subseteq A$ ideal ise, $G = M$ $G_n = I^n M$ alabiliriz. Bu durumda, $\hat{M}$ bir $\hat{A}$-modül olur ve $\hat{A} \times \hat{M} \to \hat{M}$ çarpım fonksiyonu sürekli olur.

Eğer, $f: M \to N$ A-modül homomorfizması ise $\hat{f}: \hat{M} \to \hat{N}$ homomorfizması iyi tanımlıdır ve süreklidir.

Filtreler: M A-modül, $I \subseteq A$ ideal olsun. Herhangi bir

$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ alt modül dizisine filtre denir

ve (M_n) ile gösterilir. Eğer $IM_n \subseteq M_{n+1}$, $\forall n$, filtreye I-filtre denir. Eğer yeterince büyük n değerleri için $IM_n = M_{n+1}$ ise filtreye kararlı I-filtre adı verilir. Dolayısıyla, $(I^n M)$ bir kararlı I-filtredir.

Lemma 10.6.: M'nin (M_n) ve (M'_n) iki kararlı I-filtreleri arasındaki fark sınırlıdır. Başka bir deyişle, öyle bir n_0 değeri vardır ki $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ ve $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$, $\forall n \geq 0$, olur. Dolayısıyla, bütün kararlı I-filtreler, M üzerine aynı topolojiyi koyarlar, I-adik topolojiyi.

Kanıt: $M'_n = I^n M$ almak yeterlidir. $IM_n \subseteq M_{n+1}$ olduğu için $M'_n = I^n M \subseteq M_n$ olur. Ayrıca hipotez gereği öyle bir n_0 vardır ki, $n \geq n_0 \Rightarrow IM_n = M_{n+1}$ olur.

Dolayısıyla, $M_{n+n_0} = I^n M_{n_0} \subseteq I^n M = M'_n$ olur ve kanıt tamamlanır. ∎

Derecelendirilmiş Halkalar ve Modüller:

Bir A halkası ve $(A_n)_{n \geq 0}$ alt gruplar ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa derecelendirilmiş halka olarak adlandırılır:

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_m A_n \subseteq A_{m+n}, \ \forall m, n \geq 0.$$

Bu durumda, A_0 bir alt halka da olur.

Örnek: $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $A_n =$ n'inci derece homojen polinomların kümesi.

Benzer şekilde bir M A-modülün bir (M_n) alt gruplar ailesi için $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ ve $A_m M_n \subseteq M_{n+m}$ $\forall m, n \geq 0$ koşulları sağlanıyorsa, M'ye derecelendirilmiş A-modül denir. $x \in M$, $x \in M_n$ ise x'e homojen eleman denir.

Derecelendirilmiş A-modüllerin, $M = \oplus M_n$, $N = \oplus N_n$, bir $f: M \to N$ homomorfizması $f(M_n) \subseteq N_n, \forall n$, koşulunu sağlıyorsa f homomorfizmasına derecelendirilmiştir modül homomorfizmasıdır denir.

Önerme 10.7.: Derecelendirilmiş bir halka için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) A Noetheryandır.

(ii) A_0 Noetheryandır ve A A_0-cebir olarak sonlu üretilmiştir.

Kanıt: (ii) $\Rightarrow$ (i) (Teorem 7.6, Hilbert'in Taban Teoremi)

(i) $\Rightarrow$ (ii) $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$ toplamı bir idealdir. Dolayısıyla,

$A_0 \cong A/A_+$ halkası da Noetheryandır. A Noetheryan olduğu için A_+ ideali sonlu üretilmiştir. Bu üreteçleri homojen kabul edebiliriz: $x_1, \ldots, x_s$, $\deg x_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

A' ile $x_1, \ldots, x_s$ tarafından üretilen A_0 halkasını düşünelim.

İddia: $A_n \subseteq A'$, $\forall n \geq 0$.

Kanıt: $n = 0$, $A_n = A_0$ için açıktır. Şimdi, $n > 0$ alalım ve her $m < n$ için $A_m \subseteq A'$ olduğunu kabul edelim. $y \in A_n$ olsun. $y \in A_+$ olduğu için $a_i \in A$ olmak üzere $y = \sum_{i=1} a_i x_i$ olarak yazılabilir. $y \in A_n$ olduğu için $a_i \in A_{n-k_i}$ olmalıdır. Tümevarım kabulü nedeniyle her a_i katsayıları A_0 içinde olan ve $x_1, \ldots, x_s$ değişkenlerinin bir polinomudur. Dolayısıyla, aynı ifade y için de doğrudur. O halde, $A_n \subseteq A'$, $\forall n$, olur. Böylece, $A = A'$ olmalıdır. ▪

$I \subseteq A$ bir ideal ise $A^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n$ bir derecelendirilmiş halka olur. Benzer şekilde, M bir A-modül ve (M_n) M için bir I-filtre ise $M^* = \bigoplus_{n=0} M_n$ bir derecelendirilmiş A^*-modül olur ($I^m M_n \subseteq M_{n+m}$).

Eğer A Noetheryan ise $I = (x_1, \ldots, x_r)$, sonlu üretilmiştir, ve dolayısıyla $A^* = A[x_1, \dots, x_r]$ olur ve ayrıca Noetheryen halkadır (Sonuç 7.6).

Lemma 10.8.: A Noetheryen halka, M sonlu üretilmiş A-modül ve (M_n) M için bir I-filtre olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

i) M^* sonlu üretilen A^*-modüldür.

ii) (M_n) filtresi kararlıdır.

Kanıt: Her M_n sonlu üretildiği için $Q_n = \sum_{r=0}^{n} M_r$ de sonlu üretilen A-modüldür. Q_n M^* içinde bir alt grup olur da A^*-alt modül olmayabilir. Fakat Q_n bir A^*-modül üretir:

$$M_n^* = M_0 \oplus \dots \oplus M_n \oplus I M_n \oplus I^2 M_n \oplus \dots \oplus I^r M_n \oplus \dots$$

$(I M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq M_n,\ i = 0, \dots, n-1.)$

Şimdi, Q_n sonlu üretilen A-modül olduğu için M_n^* sonlu üretilen A^*-modüldür: $m_1, \dots, m_s$ $M_0, \dots, M_n$ için üreteç kümesi ise $m_1, \dots, m_s$ A^*-modül olarak M_n^* için de üreteç kümesidir. $M_n^* \subseteq M_{n+1}^*$ ve $M^* = \bigcup_n M_n^*$.

A^* Noetheryen olduğu için, M^*'in sonlu üretilen A^*-modül olması $M_0^* \subseteq M_1^* \subseteq \dots \subseteq M_n^*$ zincirinin sonunda durması, dolayısıyla $M^* = M_{n_0}^*$, olmasına denktir. Son olarak $M^* = M_{n_0}^*$ olması ise $M_{n_0+r} = I^r M_{n_0}$, $\forall r \geq 0$, olmasına denktir. Son koşul ise filtrenin I-kararlı olması demektir. Bu kanıtı bitirir. ∎

Önerme 10.9. (Artin–Rees Lemma)

A Noetheryen halka, $I \subseteq A$ ideal, M sonlu üretilen A-modül ve (M_n) kararlı bir I-filtre olsun. Eğer $M' \subseteq M$ bir alt modül ise $(M' \cap M_n)$ M' için kararlı bir I-filtre olur.

Kanıt: $I(M' \cap M_n) \subseteq IM' \cap IM_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$ olduğu için $(M' \cap M_n)$ M' için bir I-filtredir. Dolayısıyla bu filtre $M^{*\prime}$'ın bir A^*-alt modülü tanımlar, M'^*. (M_n) M için kararlı olduğu için M^* sonlu üretilmiş A^*-modüldür (Lemma 10.8, A-Noetheryan!). O halde, M'^* A^*-alt modülü de sonlu üretilmiştir. Şimdi, yine Lemma 10.8'den dolayı ($M'_n = M_n \cap M'$) filtresi kararlıdır. ∎

$M_n = I^n M$, alınırsa yukarıdaki Önerme Artin-Rees adını alır:

<u>Sonuç 10.10</u> (Artin-Rees Lemma)

Öyle bir k tam sayısı vardır ki, her $n \geq k$ için

$$(I^n M) \cap M' = I^{n-k}((I^k M) \cap M')$$ olur.

Lemma 10.6 ve Önerme 10.9 aşağıdaki teoremi verir:

<u>Teorem 10.11.</u>: A Noetheryan halka, $I \subseteq A$ ideal, M sonlu üretilen A-modül ve $M' \subseteq M$ alt modül olsun. Bu durumda, $I^n M'$ ve $(I^n M) \cap M'$ filtrelerinin farkı sınırlıdır. Dolayısıyla, M' üzerindeki I-adik topoloji M üzerindeki I-adik topolojinin ürettiği alt uzay topolojisidir.

Yukarıdaki teoremi Sonuç 10.3 ile birleştirirsek aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

<u>Önerme 10.12.</u>: $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, Noetheryan A-halkası üzerinde sonlu üretilen modüllerin bir tam dizisi olsun. $I \subseteq A$ bir ideal ise I-adik tamlamaların dizisi de tamdır:

$$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0.$$ ∎

Doğal $A \to \hat{A}$ homomorfizması $\hat{A}$ halkasını A-cebir yapar ve dolayısıyla her A-modül M için $\hat{A} \otimes_A M$ bir $\hat{A}$-modül olur. Bu modülü $\hat{M}$ $\hat{A}$-modülü ile karşılaştırabiliriz.

Doğal $M \to \hat{M}$ A-modül homomorfizması bir $\hat{A}$-modül homomorfizması tanımlar:

$$\hat{A} \otimes_A M \longrightarrow \hat{A} \otimes_A \hat{M} \longrightarrow \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}.$$

Genelde bu fonksiyon ne birebir ne de örtendir.

<u>Önerme 10.8.:</u> A bir halka ve M sonlu üretilen A-modül ise $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ homomorfizması örtendir. Eğer ayrıca A Noetheryan ise $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ bir izomorfizmadır.

<u>Kanıt:</u> Sonuç 10.3'den dolayı, eğer $F \cong A^n$ ise $\hat{A} \otimes_A F \simeq \hat{F}$ olur. Şimdi M'nin sonlu üretildiğini kabul edelim. O halde aşağıdaki gibi bir tam dizi vardır:

$$0 \to N \to F \to M \to 0.$$

Buradan şu değişmeli şekli elde ederiz:

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{A} \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \hat{A} \otimes_A F \arrow[r] \arrow[d, "\beta", "\simeq"'] & \hat{A} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{N} \arrow[r] & \hat{F} \arrow[r] & \hat{M} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Önerme 2.18'den dolayı üst satır tamdır. Sonuç 10.3'den dolayı γ örtendir. β izomorfizma olduğu için α örten olur.

Şimdi A halkası Noetheryan ise, N halkası da (Noetheryan) sonlu üretilir ve dolayısıyla $\hat{N}$ modülü de sonlu üretilen A-modüldür (γ örten olduğu için). O halde, Önerme 10.12'den dolayı alt satır da tam dizidir. Buradan, α'nın birebir olduğu görülür. Başka bir deyişle α bir izomorfizmadır. ∎

Önerme 10.2 ve 10.3 $M \longmapsto \hat{A} \otimes_A M$ funktorunun, Noetheryan bir A halkası için, sonlu üretilen A-modüller kategorisi üzerinde tam olduğunu gösterir.

Şimdi Bölüm 2'nin sonuçlarını kullanırsak, bu gözlem şu önermeyi kanıtlar.

Önerme 10.14.: A Noetheryan halka, I bir ideal, $\hat{A}$ I-adik tamlama ise $\hat{A}$ düz A-cebirdir.

Uyarı: Sonlu üretilmeyen modüller için $M \mapsto \hat{M}$ funktoru tam değildir.

Önerme 10.15.: A Noetheryan halka ve $\hat{A}$ I-adik tamlama ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $\hat{I} = \hat{A}I \cong \hat{A} \otimes_A I$,

ii) $\widehat{(I^n)} = (\hat{I})^n$

iii) $I^n / I^{n+1} \cong \hat{I}^n / \hat{I}^{n+1}$.

iv) $\hat{I}$, $\hat{A}$ halkasının Jacobson radikalinin içinde kalır.

Kanıt: A Noetheryan olduğu için I sonlu üretilen A-modüldür. Şimdi Önerme 10.13'den dolayı $\hat{A} \otimes_A I \to \hat{I}$ fonksiyonu görüntüsü $\hat{A}I$ olan bir izomorfizmadır. Bu (i) şıkkını kanıtlar.

Şimdi (i) şıkkını kullanırsak

$$\widehat{(I^n)} = \hat{A} I^n = (\hat{A} I)^n \quad \text{(Alıştırma 1.18)}$$
$$= (\hat{I})^n \quad \text{(i), elde edilir ve bu (ii)'yi kanıtlar.}$$

Sonuç 10.4'ü kullanırsak $A/I^n \cong \hat{A}/\hat{I}^n$ elde edilir.

Buradan, $I^n/I^{n+1} \cong \dfrac{A/I^{n+1}}{A/I^n} \cong \dfrac{\hat{A}/\hat{I}^{n+1}}{\hat{A}/\hat{I}^n} \cong \hat{I}^n/\hat{I}^{n+1}$

elde edilir, (iii).

Önerme 10.5'den dolayı, $\hat{A}$ $\hat{I}$-adik topolojide tamdır, (ii)'yi kullanarak. Dolayısıyla, her $x \in \hat{I}$ için

$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ serisi yakınsaktır. Başka bir değişle $1-x$ birim elemandır. O halde, Önerme1.9'dan dolayı $\hat{I}$ $\hat{A}$'nın Jacobson radikalinin içinde kalır.

Önerme 10.16.: A Noetheryan yerel halka ve m onun maksimal ideali olsun. Bu durumda, $\hat{A}$ m-adik tamlaması da yerel halkadır ve maksimal ideali $\hat{m}$'dir.

Kanıt: Önerme 10.15(iii)'den dolayı $\hat{A}/\hat{m} \cong A/m$ olur. O halde $\hat{A}/\hat{m}$ bir cisimdir ve bu yüzden $\hat{m}$ maksimal halkadır. Yine Önerme 10.15(iv)'den dolayı $\hat{m}$, $\hat{A}$'nın Jacobson radikalinin içinde kalır ve dolayısıyla ona eşittir. Başka bir değişle $\hat{m}$ $\hat{A}$ halkasının tek maksimal halkasıdır. Bu kanıtı tamamlar. ∎

Birazdan göreceğimiz Krull Teoremi, tamlama almanın neleri geride bıraktığımız sorusunu yanıtlar:

Teorem 10.17.: A Noetheryan halka, I bir ideal, M sonlu üretilen A-modül ve $\hat{M}$ I-adik tamlama olsun. Bu durumda, $M \to \hat{M}$ homomorfizmasının çekirdeği, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M$, $1+I$ idealinin bir elemanı tarafından "annihilate" edilen $x \in M$ elemanlarından oluşur.

Kanıt: E, $0 \in M$ elemanının tüm komşuluklarının arakesiti olduğu için topolojinin E'ye kısıtlaması aşikar topolojidir; başka bir değişle ϕ ve E dışında başka açık küme yoktur. Teorem10.11'e göre E'nin üzerindeki miras topolojisi I-topolojidir. IE kümesi de bir komşuluk olduğu için $IE = E$ olmalıdır. A Noetheryan ve M sonlu üretilen bir modül olduğu için, E de sonlu üretilen bir alt modüldür. O halde, Sonuç 2.5'e göre $IE = E$ olduğu için $(1-\alpha)E = 0$ olacak şekilde $\alpha \in I$ vardır. Diğer yön açıktır: $(1-\alpha)x = 0$ ise $x = \alpha x = \alpha^2 x = \dots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = E$ elde edilir. ∎

Uyarılar: 1) Eğer $S = 1+I$ çarpma altında kapalı kümesi ise, yukarıdaki teorem $A \to \hat{A}$ ve $A \to S^{-1}A$ homomorfizmalarının çekirdekleri aynıdır. Ayrıca, $\alpha \in I$ ise

$(1-\alpha)^{-1} = 1+\alpha+\alpha^2+\dots$ $\hat{A}$ içinde yakınsaktır, öyle ki S'nin her elemanı $\hat{A}$ içinde birim elemandır. O halde, $S^{-1}A$'nın evrensel özelliği sebebiyle $S^{-1}A \to \hat{A}$ şeklinde doğal bir homomorfizma vardır ve Teorem 10.17'den dolayı bu homomorfizma birebirdir. Dolayısıyla, $S^{-1}A$ $\hat{A}$'nın bir alt halkası olarak görülebilir.

2) A Noetheryen değilse Teorem 10.17 doğru olmayabilir. $A = C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerindeki sonsuz türevlenebilir fonksiyonlar halkası ve I, $0 \in \mathbb{R}$ noktasında sıfır değeri alan fonksiyonların ideali olsun. Bu durumda, $A/I \cong \mathbb{R}$ olur. $f \in I$ ise $g(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunda $C^{\infty}(\mathbb{R})$ olduğu için $I = (x)$ olmalıdır.
Ayrıca $\bigcap I^n$, A içinde olup $x=0$ noktasında tüm türevleri sıfır olan fonksiyonların idealidir.

Diğer taraftan, herhangi bir $f \in A$, $1+\alpha$, $\alpha \in I$, şeklindeki bir eleman tarafından annihilate edilebilmesi f'nin sıfırın bir komşuluğunda tamamen sıfır olmasına denktir. Fakat, e^{-1/x^2} fonksiyonunun tüm türevleri $x=0$ noktasında sıfır olsa da, bu fonksiyon $x=0$ noktasının bir komşuluğunda sıfır değildir. Dolayısıyla, $A \to \hat{A}$ ve $A \to S^{-1}A$ homomorfizmalarının çekirdekleri farklıdır. Dolayısıyla, A Noetheryen değildir.

Krull Teoremi'nin birçok sonucu vardır:

Sonuç 10.18.: A Noetheryen (tamlık) bölgesi ve $I \neq (1)$ bir ideal ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$ olur.

Kanıt: $1+I$ kümesinin sıfır böleni yoktur. ∎

Sonuç 10.19.: A Noetheryen halka, I Jacobson radikali içinde kalan bir ideal ve M sonlu üretilen A-modül olsun. Bu durumda, M'nin I-topolojisi Hausdorff'tur: $\bigcap_n I^n M = 0$.

Kanıt: Önerme 10.9'dan dolayı $1+I$'nın her elemanı birim elemandır. Bu kanıtı tamamlar. ∎

Bu sonucun önemli bir özel hali aşağıdaki sonuçtur.

Sonuç 10.20.: A Noetheryen yerel halka, m maksimal ideali ve M sonlu üretilen A-modül olsun. Bu durumda, M üzerindeki m-topolojisi Hausdorff'tur. Özel olarak, A üzerindeki m-topolojisi de Hausdorff'tur.

Bu sonuç biraz daha farklı şekilde ifade edilebilir: Önerme 4.2 ve Önerme 7.14'den dolayı A'nın herhangi bir m-primer ideali, m ile onun bir m^n kuvveti arasında kalan herhangi bir idealdir. Dolayısıyla, Sonuç 10.20'den dolayı, A'nın tüm m-primer ideallerinin arakesiti sıfırdır. Bunun bir örneğini şöyle oluşturabiliriz: A Noetheryen halka, p asal ideal olsun. O zaman $m = pA_p$, A_p içinde maksimal olur. A ile A_p'nin idealleri arasındaki 1-1 eşlemeyi kullanarak, sonucu A'ya taşırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız:

Sonuç 10.21.: A Noetheryen halka ve $p \subseteq A$ bir asal ideal olsun. O zaman A'nın tüm p-primer ideallerinin arakesiti, $A \to A_p$ homomorfizmasının çekirdeğidir.

İlişkilendirilmiş Dereceli Halka (The associated graded ring).

A bir halka ve $I \subseteq A$ ideal olsun. Aşağıdaki derecelendirilmiş halkayı tanımlayalım:

$$G(A) \left(= G_I(A)\right) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1} \quad (I^0 = A).$$

Çarpma işlemi şu şekilde tanımlanır: $x_n \in I^n$, $x_m \in I^m$ ise $\bar{x}_n \cdot \bar{x}_m = \overline{x_n x_m} \in I^{m+n}/I^{m+n+1}$, $\bar{x}_n \in I^n/I^{n+1}$, $\bar{x}_m \in I^m/I^{m+1}$.

Benzer şekilde, M bir A-modül ve (M_n) bir I-filtre ise

$$G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1} \text{ bir } G(A)\text{-modül olur.}$$

Önerme 10.22.: A Noetheryen halka ve $I \subseteq A$ ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i) $G_I(A)$ Noetheryandır.

ii) $G_I(A)$ ve $G_{\hat{I}}(\hat{A})$ derecelendirilmiş halkalar olarak izomorfiktir.

iii) M sonlu üretilen bir A-modül ve (M_n) kararlı I-filtre ise $G(M)$ sonlu üretilen $G_I(M)$-modüldür.

<u>Kanıt:</u> i) A Noetheryen olduğu için I ideali sonlu üretilir, diyelim ki $x_1, \dots, x_s$ tarafından. $\bar{x}_i$, $i=1,\dots,n$, bu üreteçlerin I/I^2 görüntüleri olsun. O zaman

$$G(A) = (A/I)[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s] \text{ olur.}$$

A/I Noetheryen olduğu için, Hilbert Taban Teoremi'nden dolayı $G(A)$ da Noetheryendir.

ii) $I^n/I^{n+1} \cong \hat{I}^n/\hat{I}^{n+1}$ (Önerme 10.15) izomorfizması kanıtı bitirir.

iii) Filtre I-kararlı olduğu için $M_{n_0+r} = I^r M_{n_0}$, $\forall r \geq 0$, olacak şekilde bir n_0 vardır. Dolayısıyla, $G(M)$ $G(A)$-modül olarak $\bigoplus_{n \leq n_0} G_n(M)$, $G_n(M) := M_n/M_{n+1}$ tarafından üretilir. Fakat her $G_n(M)$ Noetheryendir ve I tarafından "annihilate" edilirler. Başka bir deyişle A/I-modül olarak sonlu üretilirler. O halde, $G(M)$ sonlu üretilen $G(A)$-modüldür. ■

Bu bölümün son ara sonucu Noetheryen bir halkanın I-adik tamlamasının da Noetheryen olduğudur. Bunu kanıtlamak için hazırlık yapmamız gerekiyor.

<u>Lemma 10.23.:</u> $\phi: A \to B$ derecelendirilmiş değişmeli grupların homomorfizması olsun. Başka bir deyişle $\phi(A_n) \subseteq B_n$ olduğunu kabul edelim. $G(\phi): G(A) \to G(B)$ ve $\hat{\phi}: \hat{A} \to \hat{B}$ karşılık gelen homomorfizmalar olsun. O zaman,

i) $G(\phi)$ birebir ise $\hat{\phi}$ birebirdir.
ii) $G(\phi)$ örten ise $\hat{\phi}$ örtendir.

<u>Kanıt:</u> Aşağıdaki tam dizilerin değişmeli diyagramını düşünelim:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A_n/A_{n+1} & \to & A/A_{n+1} & \to & A/A_n & \to & 0 \\
 & & \downarrow G_n(\phi) & & \downarrow \alpha_{n+1} & & \downarrow \alpha_n & & \\
0 & \to & B_n/B_{n+1} & \to & B/B_{n+1} & \to & B/B_n & \to & 0.
\end{array}$$

Bu diyagram bize şu tam diziyi verir:

$$0 \to \operatorname{Ker} G_n(\phi) \to \operatorname{Ker}\alpha_{n+1} \to \operatorname{Ker}\alpha_n \to \operatorname{Coker} G_n(\phi) \to$$
$$\operatorname{Coker}\alpha_{n+1} \to \operatorname{Coker}\alpha_n \to 0.$$

Şimdi n üzerine tümevarım ile $\operatorname{Ker}\alpha_n = 0$ veya $\operatorname{Coker}\alpha_n = 0$ olduğunu görürüz ((i) veya (ii)'yi kullanarak). Ayrıca (ii) bize $\operatorname{Ker}\alpha_{n+1} \to \operatorname{Ker}\alpha_n$'in örten olduğunu söyler (çünkü $\operatorname{Coker} G_n(\phi) = 0$). Şimdi Önerme 10.2'yi kullanırsak, $\{\alpha_n\}$ alarak, kanıt tamamlanır.

Şimdi de $\hat{A}$ halkasının Noetheryen olduğunun temel adımını kanıtlayalım. Bu sonuç Önerme 10.22'nin de kısmi tersidir.

<u>Önerme 10.22.:</u> A bir halka, I ideal, M bir A-modül ve (M_n) bir I-filtre olsun. A'nın I-adik topolojiye göre tam ve M'nin de filtre topolojine göre Hausdorff olduğunu kabul edelim ($\bigcap_n M_n = 0$). Ayrıca, $G(M)$ sonlu üretilen $G(A)$-modül olsun. O zaman, M sonlu üretilen A-modüldür.

<u>Kanıt:</u> $G(M)$'in sonlu bir üreteç kümesini alıp, her bir elemanını da homogen parçalarına ayıralım: ξ_i $(1 \leq i \leq \nu)$ ve $\xi_i \in M_{n(i)}$ olsun. $F^i = A$ A-modül olsun ve bu modülün
$$F^i_k = I^{k+n(i)}$$
kararlı I-filtresini alalım.

$F = \bigoplus_{i=1}^{\nu} F^i \cong A^\nu$ alalım. Şimdi, $\phi : F \to M$, $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ ve $x_i \in M_{n(i)}$, $x_i \mapsto \xi_i$ olmak üzere, $\phi(e_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, \nu$, tanımlanan filtrelenmiş gruplar homomorfizmasını göstersin. Bu durumda, $G(\phi) : G(F) \to G(M)$, $G(A)$-modül homomorfizması olur. Tanımı gereği $G(\phi)$ örtendir. O halde, Lemma 10.23 (ii)'den dolayı $\hat{\phi}$ örtendir.

Şimdi aşağıdaki diyagramı düşünelim:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \hat{F} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{M} \end{array}$$

F serbest A-modül ve $\hat{A} = A$ (A tamdır) olduğu için α isomorfizmadır. M Hausdorff olduğu için β birebirdir. Fakat $\hat{\phi}$ örten olduğu için ϕ örtendir ve dolayısıyla, M

$x_1, \dots, x_r$ tarafından üretilen A-modül olur. ∎

Sonuç 10.25.: Önerme 10.24'ün hipotezleri altında, eğer $G(M)$ Noetheryan $G(A)$-modül ise M de Noetheryan A-modüldür.

Kanıt: M'nin her $M' \subseteq M$ alt modülünün sonlu üretildiğini göstereceğiz. $M'_n = M' \cap M_n$, M' için bir I-filtre olacaktır. Ayrıca, $M'_n \to M_n$ birebir fonksiyonu $M'_n / M'_{n+1} \to M_n / M_{n+1}$ birebir homomorfizmasını verir. Bu durumda, $G(M') \to G(M)$ fonksiyonu da gömme fonksiyonu olur. $G(M)$ Noetheryan olduğu için $G(M')$ alt modülü sonlu üretilir. Ayrıca, M' Hausdorff olduğu için $(\cap M'_n \subseteq \cap M_n = 0)$ Önerme 10.24, M' modülünün sonlu üretilen A-modül olduğunu söyler. Böylece kanıt tamamlanır. ∎

Teorem 10.26.: A Noetheryan halka ve I bir ideali ise A'nın I-adik tamlaması, $\hat{A}$, Noetheryan halkadır.

Kanıt: Önerme 10.22'den dolayı $G_I(A) \cong G_{\hat{I}}(\hat{A})$ Noetheryandır. Şimdi $M = \hat{A}$ $\hat{A}$-modülü olsun. $\hat{A}$ tam halka ve M Hausdorff olduğu için Sonuç 10.25'den $M = \hat{A}$ Noetheryan $\hat{A}$-modüldür. ∎

Sonuç 10.27.: A Noetheryan bir halka ise, $B = A[[x_1, \dots, x_n]]$ kuvvet serileri halkası Noetheryandır. Dolayısıyla, k cisim olmak üzere, $k[[x_1, \dots, x_n]]$ halkası Noetheryan'dır.

Kanıt: A Noetheryan olduğu için Hilbert Taban Teoreminden dolayı $A[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası Noetheryandır. B ise $A[x_1, \dots, x_n]$ halkasının $I = (x_1, \dots, x_n)$-adik topolojiye göre tamlamasıdır ve dolayısıyla, yukarıdaki teoremden dolayı, Noetheryandır. ∎

Bölüm 11. Boyut Teorisi:

Hilbert Fonksiyonları:

$A = \bigoplus_{0}^{\infty} A_n$ Noetheryan bir halka olsun. Önerme 10.7'ye göre A_0 Noetheryan halkadır ve A A_0-cebir olarak sonlu eleman tarafından üretilir. Bu üreteçleri homogen kabul edebiliriz, diyelim ki $x_1, \ldots, x_s$, olsun, $\deg x_i = k_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$.

Benzer şekilde, M sonlu üretilen dereceli A-modül ise, M'nin üreteçlerinin m_j, $j = 1, \ldots, t$, $\deg m_j = r_j > 0$, olacak şekilde homogen elemanlardan oluştuğunu kabul edebiliriz.

M'nin n. derece homogen elemanlarının kümesi ise, her elemanı $\sum_j f_j(x) m_j$, $\deg f_j(x) + \deg m_j = n$, $f_j(x) \in A$, sonlu toplamı şeklindedir. Buradan, M_n'nin A_0-modül olarak sonlu sayıda $g_j(x) m_j$ şeklindeki eleman tarafından üretildiğini kabul edebiliriz.

λ sonlu üretilen A_0-modüller sınıfı üzerinde tamsayı değerli toplamsal bir fonksiyon olsun. Bu durumda, M'nin Poincaré polinomu $P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ olarak tanımlanır. $n < 0$ için $M_n = 0$ olarak tanımlanırsa, $\lambda(M_n) = 0$ olur ve $P(M,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$ yazabiliriz.

Teorem 11.1. (Hilbert, Serre)

$P(M,t)$, $f(t) / \prod_{i=1}^{s} (1 - t^{k_i})$, $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, şeklinde rasyonel bir fonksiyondur.

Kanıt: A'nın A_0 cebir olarak üreteç kümesinin eleman sayısı olan s sayısı üzerine tümevarım yapalım. $s = 0$ ise her $A_n = 0$, $n > 0$ ve dolayısıyla $A = A_0$ olur. M sonlu üretilen bir A_0-modül olacağı için yeterince büyük tüm $n \in \mathbb{Z}$ sayıları için $M_n = 0$ olur. Dolayısıyla, $P(M,t) \in \mathbb{Z}[t]$, polinom olur.

Şimdi $s > 0$ ve teoremin $s-1$ için olduğunu kabul edelim. A'nın A_0 üreteç kümesinin son elemanı x_s ile çarpma fonksiyonu $M_n \to M_{n+k_s}$, $k_s = \deg x_s$, A_0-modül homomorfizması verir. Buradan aşağıdaki tam dizisini elde ederiz:

$$0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{x_s} M_{n+k_s} \to L_{n+k_s} \to 0.$$

$K = \bigoplus_n K_n$, $L = \bigoplus_n L_n$ modülleri sonlu üretilen A-modüllerdir ($K \subseteq M$ alt modül, $L \cong M/K$ olduğu için). Her ikisi de x_s ile "annihilate" edildiği için bu modüller $A_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$-modüllerdir. Yukarıdaki tam diziye λ'yı uygularsak ve tümevarım hipotezini kullanırsak, sırasıyla

$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0$ ve bunu

t^{n+k_s} ile çarpıp toplam alarak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+k_s}\lambda(K_n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+k_s}\lambda(M_n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+k_s}\lambda(M_{n+k_s}) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+k_s}\lambda(L_{n+k_s}) = 0$$

$$t^{k_s} P(K,t) - t^{k_s} P(M,t) + P(M,t) - P(L,t) = 0$$

$\Rightarrow (1-t^{k_s}) P(M,t) = P(L,t) - t^{k_s} P(K,t)$ elde edilir;

L, K $A_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$-modül oldukları için Poincaré serileri istenilen tiptedir. O halde, $P(M,t)$'de aynı tipte bir rasyonel fonksiyon olur. ∎

$P(M,t)$ fonksiyonunun $t=1$'deki kutbunun derecesini $d(M)$ sayısı ile göstereceğiz. Özel durumda, $d(A)$ sayısı da tanımlanır.

<u>Sonuç 11.2.</u>: Eğer her $k_i = 1$ ise, yeterince büyük her n sayısı için $\lambda(M_n)$, n'nin derecesi $d(M)-1$ olan bir polinomudur. ($\deg(0) = -1$ ve $\binom{n}{-1} = 0$, $n \geq 0$ ve $\binom{n}{-1} = 1$, $n=-1$ olduğunu kabul ediyoruz.)

<u>Kanıt</u>: Yukarıdaki teoremden dolayı $\lambda(M_n)$ sayısı $f(t) \cdot (1-t)^{-s}$ fonksiyonun açılımındaki t^n teriminin katsayısıdır. Gerekirse $(1-t)$'nin kuvvetlerini pay ve paydadan yok ederek $f(1) \neq 0$ ve $s = d$ olduğunu kabul edebiliriz.

Diyelim ki, $f(t)=\sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ olsun.

$$(1-t)^{-d}=(1+t+t^2+\dots)^d=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{d+l-1}{d-1}t^l$$

olduğu için $\lambda(M_n)=\sum_{k=0}^{N} a_k\binom{d+n-k-1}{d-1}$, $n\geq N$, olur ($l+k=n \Rightarrow l=n-k$ olur).

Son toplam n'nin bir polinomudur ve en yüksek dereceli terimi $(\sum a_k)n^{d-1}/(d-1)! \neq 0$ dır. ∎

Uyarılar 1) Bir polinomun değerlerinin tümü tamsayı olsa da katsayıları tam sayı olmayabilir: $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ örneklerinde olduğu gibi.

2) Sonuç 11.2'deki polinoma Hilbert polinomu veya fonksiyonu adı verilir.

Teorem 11.1'in kanıtındaki x_s elemanını herhangi bir $x\in A_k$ elemanı ile değiştirelim ve x'in sıfır böleni olmadığını kabul edelim. Bu durumda $K=0$ ve $P(K,t)=0$ olur. Dolayısıyla,

$P(M,t)=P(L,t)/(1-t^k)$ olacağı için

$d(L)=d(M)-1$ elde edilir. Bu sonuç aşağıdaki önermenin içerdiğidir.

Önerme 11.3.: Eğer, $x\in A_k$ sıfır böleni değilse

$d(M/xM)=d(M)-1$ olur.

Şimdi Teorem 11.1'i A_0 bir Artin halka (örneğin bir cisim) ve $\lambda(M)=l(M)$, modülün uzunluk fonksiyonu olduğu durumda kullanacağız. Önerme 6.9'dan dolayı $l(M)$ toplamsaldır.

Örnek: A_0 Artin halka olmak üzere $A=A_0[x_1,\dots,x_s]$ polinom halkası olsun. Bu durumda, A_n serbest A_0-modüldür ve $x_1^{m_1}\dots x_s^{m_s}$, $\sum m_s=n$, homojen polinomlarıyla üretilir.

Üreteçlerin sayısı $\binom{s+n-1}{s-1}$ olduğu için $P(A,t) = (1-t)^{-s}$ olur.

Şimdi de yerel halkaların Hilbert polinomlarını ele alacağız.

Önerme 11.4.: A Noetheryen yerel halka, m maksimal ideali, q bir m-primer ideal, M sonlu üretilen A-modül ve (M_n) kararlı q-filtrasyon olsun. O zaman,

i) Her $n \geq 0$ için M/M_n sonlu uzunluktadır.

ii) Yeterince büyük n değerleri için bu uzunluk fonksiyonu, s q'nun en küçük üreteç sayısı olmak üzere, derecesi s'den küçük bir $g(n)$ polinomudur.

iii) $g(n)$ polinomunun derecesi ve en üst dereceli katsayısı M ile belirlenir, seçilen filtreden bağımsızdır.

Kanıt: $G(A) = \bigoplus_n q^n/q^{n+1}$ ve $G(M) = \bigoplus_n M_n/M_{n+1}$ olsun. $G_0(A) = A/q$, Artin yerel halkadır (Teorem 8.5), ve Önerme 10.22'den dolayı $G(A)$ Noetheryen halka, $G(M)$ ise sonlu üretilen derecelendirilmiş $G(A)$-modüldür. Her $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ q tarafından annihilate edilen Noetheryen A-modül olduğu için Noetheryen A/q-modüldür ve bu yüzden (ve A/q Artin olduğundan) sonlu uzunluktadır. Dolayısıyla, M/M_n sonlu uzunluktadır ve

$$(*) \quad l_n = l(M/M_n) = \sum_{r=1}^{n} l(M_{r-1}/M_r)$$ olur.

ii) Eğer $x_1, \ldots, x_s$ q idealini üretirse, bunların q/q^2 içindeki $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$ görüntüleri $G(A)$'yı A/q-cebir olarak üretir. Ayrıca her bir $\bar{x}_i$'in derecesi 1'dir. Dolayısıyla, Sonuç 11.2'den dolayı $l(M_n/M_{n+1}) = f(n)$ olur, ve burada $f(n)$, büyük n değerleri için, derecesi en fazla $s-1$ olan bir polinomdur. Yukarıdaki $(*)$ eşitliğinden

$l_{n+1} - l_n = f(n)$ olduğu için l_n'nin, (n'nin büyük değerleri için) derecesi $\leq s$ olan bir $g(n)$ polinomu olduğunu görürüz.

iii) $(\widetilde{M}_n)$ bir başka kararlı q-filtre olsun ve $\tilde{g}(n) = l(M/\widetilde{M}_n)$ uzunluğunu göstersin. Lemma 10.6'dan dolayı bu iki filtre sınırlı farka sahiptir ve dolayısıyla, her $n \geq 0$ için

$M_{n+n_0} \subseteq \widetilde{M}_n$ ve $\widetilde{M}_{n+n_0} \subseteq M_n$, olacak şekilde bir n_0 değeri vardır. Buradan, $g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n)$ ve $\tilde{g}(n+n_0) \geq g(n)$ eşitsizliklerini elde ederiz. Büyük n değerleri için $g(n)$ ve $\tilde{g}(n)$ polinom olduğu için $\lim_{n\to\infty} g(n)/\tilde{g}(n) = 1$ elde ederiz. Dolayısıyla, bu iki polinomun derecelerini ve en büyük katsayıları eşittir. ∎

__Notasyon:__ $\chi_q^M(n) = g(n) = l(M/q^nM)$ (yeterince büyük n için).

Eğer $M = A$ ise $\chi_q^A(n)$ yerine $\chi_q(n)$ yazarız ve m-primer q idealinin karakteristik polinomu olarak adlandırırız.

Bu durumda, Önerme 11.4 bize şu sonucu verir:

__Sonuç 11.5.:__ Yeterince büyük n sayıları için, $l(A/q^n)$ uzunluk fonksiyonu derecesi en fazla s olan bir polinomdur $(\chi_q(n))$.

__Önerme 11.6.:__ A, m ve q yukarıdaki gibi ise

$$\deg \chi_q(n) = \deg \chi_m(n) \text{ olur.}$$

__Kanıt:__ Önerme 7.16'dan dolayı $m \supseteq q \supseteq m^r$ olacak şekilde bir r sayısı vardır. Buradan, $m^n \supseteq q^n \supseteq m^{nr}$ elde edilir. O halde,

$$\chi_m(n) \leq \chi_q(n) \leq \chi_m(rn), \quad n \text{ yeterince büyük ise,}$$

elde ederiz. Bu fonksiyonların polinom olduğunu aklımızda tutup limit alırsak sonuca varırız. ∎

Bu önermenin varlığını kanıtladığı bu ortak dereceyi $d(A)$ ile göstereceğiz. Dolayısıyla, Sonuç 11.2'ye göre

$d(A) = d(G_m(A))$, olur. Burada $d(G_m(A))$ ile $G_m(A)$ modülünün Hilbert fonksiyonunun $t=1$ noktasındaki kutbunu gösterir.

Noetheryen Yerel Halkaların Boyut Teorisi:

A Noetheryen yerel halka ve m maksimal ideali olsun.

$\delta(A)$ ile A'nın m-primer idealleri içinden üreteç eleman sayısı en küçük olanın eleman sayısını gösterelim. Ana hedefimiz $\delta(A) = d(A) = \dim A$ eşitliklerini göstermek olacak. Bunu $\delta(A) \geq d(A) \geq \dim A \geq \delta(A)$ eşitsizliklerini kanıtlayarak yapacağız.

Sonuç 11.5 ve Önerme 11.6 bu zincirin ilk halkasını verir:

Önerme 11.7.: $\delta(A) \geq d(A)$.

Önerme 11.8.: A, m ve q yukarıdaki gibi olsun. M sonlu üretilen A-modül, $x \in A$ sıfırı bölmeyen bir eleman ve $M' = M/xM$ olsun. O zaman,

$$\deg \chi_q^{M'} \leq \deg \chi_q^{M} - 1 \text{ olur.}$$

Kanıt: $N = xM$ ise $M \to N$, $y \mapsto xy$, fonksiyonu bir A-modül izomorfizmasıdır. $N_n \doteq N \cap q^n M$ olarak tanımlansın. O zaman aşağıdaki dizi tamdır:

$$0 \to N/N_n \to M/q^n M \xrightarrow{x\cdot} M'/q^n M' \to 0.$$

Şimdi, $g(n) = l(N/N_n)$ fonksiyonu ise $g(n) - \chi_q^M(n) + \chi_q^{M'}(n) = 0$ elde ederiz, n yeterince büyük olduğunda. Şimdi Artin-Rees Lemma (Önerme 10.9) (N_n)'nin N için kararlı q-filtre olduğunu söyler. $N \cong M$ olduğu için Önerme 11.4'den dolayı $g(n)$ ve $\chi_q^M(n)$ polinomlarının en yüksek dereceli terimleri aynıdır. Bu kanıtı bitirir. ∎

Sonuç 11.9.: Eğer A Noetheryen yerel halka ve $x \in A$ sıfır bölen değilse, $d(A/(x)) \leq d(A) - 1$ olur.

Şimdi zincirin bir sonraki halkasını kanıtlayabiliriz:

Önerme 11.10.: $d(A) \geq \dim A$.

Kanıt: $d = d(A)$ üzerine tümevarım yapacağız.

$d=0$ ise $l(A/m^n)$ yeterince büyük n değerleri için sabit (bir polinom) olacaktır. O halde, $m^n = m^{n+1}$ olacak şekilde bir n vardır. Bu durumda Nakayama Lemma (Önerme 2.6) bize $m^n = 0$ olduğunu söyler. Dolayısıyla, A bir Artin halkasıdır ve bu sebeble $\dim A = 0$'dır.

Şimdi, $d>0$ olsun ve $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_r$ asal ideal zinciri alalım. $x \in p_1 \setminus p_0$ olsun. $A' \doteq A/p_0$ ve x' de x'in A' içindeki görüntüsü olsun. A' bir tamlık bölgesidir ve $x' \neq 0$ dır. Dolayısıyla, Sonuç 11.9'a göre $d(A'/(x')) \leq d(A') - 1$ olur. $m' \subseteq A'$ asal ideali ise, A'/m'^n, A/m^n'nin doğal homomorfizma altındaki görüntüsüdür. Dolayısıyla, $l(A/m^n) \geq l(A'/m'^n)$ ve $d(A) \geq d(A')$ olur. Sonuç olarak $d(A'/(x')) \leq d(A) - 1 = d-1$ elde edilir.

Şimdi, tümevarım hipotezinden, $A'/(x')$ içindeki herhangi bir asal ideal zincirinin uzunluğu $\leq d-1$ olur. Fakat, $p_1, \ldots, p_r$ ideallerinin $A'/(x')$ içindeki görüntüleri uzunluğu $r-1$ olan bir zincir verir. O halde, $r-1 \leq d-1 \Rightarrow r \leq d$ elde edilir. Başlangıçta seçtiğimiz zincir rastgele olduğu için $\dim A \leq d$ elde edilmiş olur. ∎

Sonuç 11.11: A Noetheryen yerel halka ise $\dim A$ sonludur.

~ o ~

A bir halka ve $p \subseteq A$ asal ideal ise, p'nin yüksekliği $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_r = p$ şeklindeki zincirler için r sayılarının supremumu olarak tanımlanır. Dolayısıyla, $\operatorname{height} p = \dim A_p$ olur (Sonuç 3.13). O halde, Sonuç 11.11'den şunu elde ederiz:

Sonuç 11.12: Noetheryen bir halkada asal ideallerin yüksekliği her zaman sonlu bir sayıdır. Başka bir değişle, Noetheryen bir halkanın asal ideallerinin kümesi azalan zincir koşulunu (dcc) sağlar.

Hatırlatma: Asal idealleri artan şekilde alarak bir idealin derinliğini, depth p, tanımlayabiliriz. depth $p = \dim(A/p)$ olduğu açıktır. Bir idealin derinliği, Noetheryen halkalarda böyle, sonsuz olabilir (Alıştırma 4).

Önerme 11.13.: A boyutu d olan Noetheryan yerel halka olsun. O zaman, A içinde $x_1, \dots, x_d$ gibi d tane eleman tarafından üretilen bir m-primer ideal vardır. Dolayısıyla, $\dim A \geq \delta(A)$ dır.

Kanıt: $x_1, \dots, x_d$ elemanlarını tümevarım metodu ile inşa edeceğiz öyle ki, $(x_1, \dots, x_i)$ idealini içeren her asal ideal en az i yüksekliğinde olacak. $i > 0$ alalım ve $x_1, \dots, x_{i-1}$ elemanlarının istenilen şartları sağlayacak şekilde seçildiğini kabul edelim. $\{p_1, \dots, p_s\}$ (eğer varsa) $(x_1, \dots, x_{i-1})$ idealinin yüksekliği $i-1$ olan minimal asal idealleri olsunlar. $i-1 < d = \dim A = \text{height}\, m$ olduğu için $m \neq p_j$, $j = 1, \dots, s$, olur ve bu yüzden $m \neq p_1 \cup \dots \cup p_s$ (Önerme 1.11). Şimdi $x_i \in m \setminus (p_1 \cup \dots \cup p_s)$ seçelim. q $(x_1, \dots, x_i)$ idealini içeren herhangi bir asal ideal olsun. Bu durumda, q $(x_1, \dots, x_{i-1})$'i içeren minimal asallardan birini içermek zorundadır. Eğer $p = p_j$, $j = 1, \dots, s$, ise, $x_i \in q$, $x_i \notin p$ olduğu için $p \subsetneqq q$ olur ve böylece $\text{height}\, q \geq i$ olur. Eğer $p \neq p_j$, $j = 1, \dots, s$, ise $\text{height}\, p \geq i$ ve $\text{height}\, q \geq i$ olur. Dolayısıyla, $(x_1, \dots, x_i)$ idealini içeren her asalın yüksekliği en az i'dir.

Şimdi $(x_1, \dots, x_d)$ idealini düşünelim. Eğer p bunun bir asalı ise (Teorem 7.13'e göre Noetheryan halkalarda her idealin primer ayrışımı vardır), yukarıdaki paragraftan dolayı $\text{height}\, p \geq d$ olur. Eğer $p \subsetneqq m$ olsaydı $d = \text{height}\, p < \text{height}\, m = d$ olurdu. Bu çelişki bize $p = m$ olduğunu gösterir. O halde, $(x_1, \dots, x_d)$ m-primer dir ve böylece kanıt tamamlanır. ∎

Teorem 11.14. (Boyut Teoremi)

Noetheryan bir yerel halka için aşağıda tanımlanan üç tamsayı eşittir.

i) A'nın asal ideal zincirlerinin en uzununun uzunluğu,
ii) $\chi_m(n) = l(A/m^n)$ karakteristik polinomunun derecesi,
iii) A'nın m-primer ideallerinin üreteç sayılarının en küçüğü.

Kanıt: Önerme 11.7, 11.10 ve 11.13 kanıtı verir. ∎

Örnek: $A = k[x_1, \ldots, x_n]_m$ polinom halkasının $m = (x_1, \ldots, x_n)$ maksimal idealindeki yerel halkası olsun. O zaman,

$$G_m(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} m^n / m^{n+1} \quad (m^0 = A)$$

yine n değişkenli polinom halkası olur ve dolayısıyla Poincaré serisi $(1-t)^{-n}$ dir. Şimdi yukarıdaki teoremin (i) ve (ii) şıklarından $\dim A = n$ elde edilir.

Sonuç 11.15.: A Noetherian yerel halka olsun.

O zaman, $\dim A \leq \dim_k (m/m^2)$'dir.

Kanıt: Eğer $x_i \in m$, $i = 1, \ldots, s$, elemanlarının görüntüleri m/m^2 vektör uzayı için bir taban teşkil ediyorsa Önerme 2.8'den dolayı $m = (x_1, \ldots, x_s)$ olur. Dolayısıyla, $\dim_k (m/m^2) = s \geq \dim A$ elde edilir (Önerme 11.13). ∎

Sonuç 11.16.: A Noetherian halka ve $x_1, \ldots, x_r \in A$ olsun. Bu durumda $(x_1, \ldots, x_r)$ idealini içeren her asalın yüksekliği en fazla r'dir.

Kanıt: A_p yerel Noetherian halka içinde $(x_1, \ldots, x_r)$ ideali p^e- primerdir ve dolayısıyla $r \geq \dim A_p = \operatorname{height} p$ olur. ∎

Sonuç 11.17.: (Krull'un Esas İdeal Teoremi)

A Noetherian bir halka ve $x \in A$ ne bir sıfır bölen ne de birim olsun. O zaman, (x) idealini içeren her minimal asalın yüksekliği bir olur.

Kanıt: Sonuç 11.16'dan dolayı $\operatorname{height} p \leq 1$ dir. Eğer $\operatorname{height} p = 0$ olsaydı, p sıfır idealine ait asal olurdu. Bu durumda ise Önerme 4.7'den p'nin her elemanı sıfır bölen olurdu. Bu çelişki ($x \in p$ sıfır bölen değildir) kanıtı tamamlar. ∎

Sonuç 11.8.: A Noetheryan yerel halka ve $x \in m$ sıfır böleni olmayan bir eleman olsun. O zaman,

$$\dim A/(x) \leq \dim A - 1, \text{ olur.}$$

Kanıt: $\dim A/(x) = d$ olsun. Sonuç 11.9 ve Teorem 11.14'den dolayı $d \leq \dim A - 1$ olur. Diğer yandan, $x_1, \ldots, x_d \in m$ seçelim, öyle ki görüntüleri $A/(x)$ içinde $m/(x)$ -primer olsun. O zaman, $(x, x_1, \ldots, x_d)$ A içinde m-primer olur ve böylece $d+1 \geq \dim A$ elde edilir. Bu kanıtı tamamlar. ∎

Sonuç 11.19.: A Noetheryan yerel halka ve m maksimal ideali olsun. $\hat{A}$ A'nın m-adik tamlaması ise $\dim \hat{A} = \dim A$ olur.

Kanıt: Önerme 10.15'e göre $A/m^n \cong \hat{A}/\hat{m}^n$ dir ve bu yüzden $\chi_m(n) = \chi_{\hat{m}}(n)$ olur. Bu kanıtı tamamlar. ∎

$d = \dim A$ olmak üzere $x_1, \ldots, x_d$ bir m-primer ideali üretirlerse, $x_1, \ldots, x_d$ elemanlarına parametreler sistemi denir. Bu konuyla ilgili aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 11.20.: $x_1, \ldots, x_d$ A halkası için parametreler sistemi ve $q = (x_1, \ldots, x_d)$ de siz konusu m-primer ideal olsun. $f(t_1, \ldots, t_d)$ katsayıları A'da olan derecesi s homojen bir polinom olsun. $f(x_1, \ldots, x_d) \in q^{s+1}$ ise f'nin tüm katsayıları m'nin içindedir.

Kanıt: $\alpha : (A/q)[t_1, \ldots, t_d] \longrightarrow G_q(A)$, $t_i \longmapsto \bar{x}_i$, örten dereceli halka homomorfizması olsun. Kabulden dolayı $\bar{f}(t_1, \ldots, t_d) \in \ker \alpha$ olur. Eğer f'nin bir katsayısı A içinde birim eleman olsaydı, $\bar{f}(t_1, \ldots, t_d)$ sıfır böleni olmazdı (Bölüm 1, Alıştırma 3). O halde,

$$d(G_q(A)) \leq d((A/q)[t_1, \ldots, t_d]/(\bar{f})) \quad (\bar{f} \in \ker \alpha \text{ olduğu için halen örtendir})$$

(Önerme 11.3)
$$< d((A/q)[t_1, \ldots, t_d]) - 1$$
$$< d - 1 \quad (\text{Önerme 11.3'nin sonrasındaki örnek.})$$

Fakat Teorem 11.14'den dolayı $d(G_q(A)) = d$ olduğu için, kanıt tamamlanır. ∎

Bu önermenin aşağıdaki özel hali basit bir hal alır:

<u>Sonuç 11.21.:</u> Eğer $k \subseteq A$, A/m cismine, $A \to A/m$, altında izomorfik bir cisim ise, $x_1, \dots, x_d$ gibi parametreler sistemi, k cismi üzerinde cebirsel bağımsız elemanlardır.

<u>Kanıt:</u> f katsayıları k'da olan bir polinom olmak üzere $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ olsun. Eğer $f \neq 0$, sıfır polinomu değilse bu polinomu $f = f_s +$ yüksek dereceli terimler, $f_s \neq 0$ dereceli s olan homojen polinom olacak şekilde yazalım. $f_s(x_1, \dots, x_d) \in q^{s+1}$ olacağı için Önerme 11.20'den dolayı f_s'nin tüm katsayıları m içinde kalır. Fakat f'nin katsayıları k'dan seçildiği için $f_s = 0$ sıfır polinomu olmalıdır. Bu çelişki f polinomunun sıfır polinomu olduğunu gösterir ve kanıt tamamlanır. ∎

<u>Regüler Yerel Halkalar:</u>

Cebirsel geometrinin regüler (dejenere olmayan) nokta kavramının cebirsel karşılığı Regüler Yerel Halkadır. Bu halkalar aşağıdaki teorem ile karakterize edilirler.

<u>Teorem 11.22.:</u> A boyutu d olan Noetheryen yerel halka ve m onun maksimal ideali olsun. $k = A/m$ olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

i) $G_m(A) \cong k[t_1, \dots, t_d]$, t_i'ler (cebirsel) bağımsız değişkenlerdir.

ii) $\dim_k(m/m^2) = d$.

iii) m, d eleman tarafından üretilir.

<u>Kanıt:</u> (i) ⟹ (ii): $G_m(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} m^n/m^{n+1} \cong k[t_1, \dots, t_d]$ ile

$m \longleftrightarrow (t_1, \dots, t_d)$ idealine denk gelir ve dolayısıyla m/m^2 $k = A/m$ vektör uzayı da $t_1, \dots, t_d$ elemanlarının görüntüleriyle gerilir. Bu elemanlar bir baz oluşturur.

(ii) ⟹ (iii). Sonuç 11.15'in kanıtındakine benzer şekilde Önerme 2.? kullanılarak kanıtlanır.

(iii) ⟹ (i). $m = (x_1, \dots, x_n)$ olsun. O zaman, Önerme 11.20'den dolayı $\alpha : k[x_1, \dots, x_d] \to G_m(A)$ bir dereceli halka izomorfizmasıdır. ∎

Her regüler yerel halka bir tamlık bölgesidir.

Lemma 11.23.: A bir halka, $I \subseteq A$ bir ideal olsun öyle ki $\bigcap_n I^n = 0$. Eğer $G_I(A)$ tamlık bölgesi ise A da bir tamlık bölgesidir.

Kanıt: $x, y \in A$, $x \neq 0 \neq y$, iki eleman olsun. $\bigcap I^n = 0$ verildiği için $x \in I^r \setminus I^{r+1}$, $y \in I^s \setminus I^{s+1}$ olacak şekilde r ve s vardır. $\bar{x}, \bar{y} \in G_I(A)$ içinde sıfır elemanı değildirler. $G_I(A)$ tamlık bölgesi olduğu için $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y} \neq 0$ dır. O halde, $xy \neq 0$ olmalıdır. ∎

Uyarı: 1) Önerme 9.2'den dolayı boyutu bir olan regüler yerel halkalar ayrık değerlendirme halkalarıdır.

2) Eğer A yerel halka ve $G_m(A)$ integral kapalı ise, A halkası da integral kapalıdır. Dolayısıyla, regüler yerel halkalar integral kapalıdırlar. Diğer yandan, integral kapalı, boyutu > 1 ve regüler olmayan, yerel halkalar vardır.

Önerme 11.24.: A Noetheryan yerel halka olsun. O zaman A'nın regüler olması için gerek ve yeter şart $\hat{A}$'nın regüler olmasıdır.

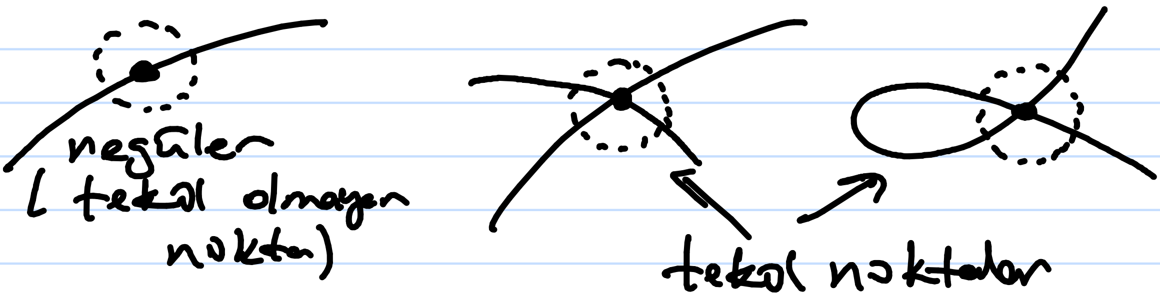
Kanıt: Önerme 10.16, Teorem 10.26 ve Sonuç 11.19'dan dolayı, $\hat{A}$ boyutu A'nınkine eşit olan Noetheryan yerel halkadır ve maksimal ideali $\hat{m}$'dır. Şimdi Önerme 10.22'yi kullanırsak $G_m(A) \cong G_{\hat{m}}(\hat{A})$ eşitliğini elde ederiz ve böylece kanıt tamamlanır. ∎

Uyarılar. 1) Yukarıda yaptığımızın bir sonucu olarak $\hat{A}$ halkası da bir tamlık bölgesidir. Bunun (yerel) geometrik karşılığı şöyledir:

Cebirsel varyetenin bir noktasının tekil olmaması

$\Downarrow$

Analitik olarak indirgenemez olmak ya da o noktadan tek bir (branch) kol geçiyor olması.



2) Eğer A, A/m'ye, $A \to A/m$ homomorfizması altında izomorf olarak gönderilen bir $k \subseteq A$ cismine sahipse, Teorem 11.22'den dolayı $\hat{A}$ d-boyutlu bir formal kuvvet serisi (k üzerinde) halkasıdır. Dolayısıyla, tekil olmayan noktaların yerel halkaların tamlamaları izomorfiktir (aynı boyutlu olmak şartıyla).

Örnek: $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $m = (x_1, \dots, x_n)$ olsun (k cisim). Daha önce $G_m(A)$'nın n-değişkenli polinom halkası olduğunu görmüştük. Dolayısıyla, A_m (k^n'nin 0 noktasındaki yerel halkası) bir regüler yerel halkadır.

Aşkın (transcendental) boyut:

$k = \bar{k}$ cebirsel kapalı bir cisim ve V k üzerinde afin cebirsel varyete olsun. $V \subseteq k^n$ ise $I(V)$ ideali

$$I(V) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \ \forall x \in V \}$$ ile tanımlanır.

Eğer $I(V) = p$ asal ise varyeteye indirgenemez denir.

$A(V) = k[x_1, \dots, x_n] / I(V) = k[x_1, \dots, x_n]/p$ tamlık bölgesi olur.

$k(V) = A(V)_{(0)}$, V'nin rasyonel fonksiyon cismi adını alır. Bu cismin k üzerindeki (transcendental) aşkın derecesine V varyetesinin boyutu denir. Nullstellensatz bize V'nin noktalarıyla $A(V)$'nin maksimal idealleri arasında birebir eşleme olduğunu söyler. Eğer $p \in V$ $m \subseteq A$ idealine karşılık geliyorsa, $\dim A(V)_m$ sayısına V'nin p noktasındaki yerel boyutu denir.

<u>Teorem 11.25.:</u> V, $k=\bar{k}$ üzerinde indirgenemez bir varyete ise V'nin herhangi bir noktasındaki yerel boyutu, V'nin boyutuna eşittir.

<u>Uyarı:</u> Sonuç 11.21'den dolayı $\dim V \geq \dim A_m$ olduğunu biliyoruz. Teoremi kanıtlamak için eşitsizliğin diğer yönünü göstermeliyiz. İlk önce bir lemmaya ihtiyacımız var.

<u>Lemma 11.26.:</u> $B \subseteq A$ tamlık bölgeleri olsun, öyle ki B integral kapalı ve A, B üzerinde integral olsun. $m \subseteq A$ içinde maksimal ideal ve $n = m \cap B$ alalım. O zaman n maksimaldir ve $\dim A_m = \dim B_n$ dir.

<u>Kanıt:</u> Sonuç 5.8'den dolayı $n \subseteq B$ maksimaldir. Şimdi,

$$m \supsetneq q_1 \supsetneq q_2 \supsetneq \cdots \supsetneq q_d \quad \text{asal ideal zinciri ise bunların}$$

B ile ara kesitleri de, $n \supsetneq p_1 \supsetneq \cdots \supsetneq p_d$ de B içinde asal ideal zinciridir.

Dolayısıyla, $\dim B_n \geq \dim A_m$ elde edilmiş olur.

Diğer yandan, B içinde verilen her asal dizide A'ya taşınabilir (Teorem 5.16, Aşağı Gidiş Teoremi). O halde, $\dim A_m \geq \dim B_n$ doğrudur. Böylece kanıt tamamlanır. $\blacksquare$

<u>Teorem 11.25'in kanıtı:</u>

Bölüm 5, Alıştırma 16'dan dolayı bir $B = k[x_1, \ldots, x_d] \subseteq A(V)$ polinom halkası bulabiliriz, öyle ki $d = \dim V$ ve $A(V)$, B üzerinde integral olur. Önerme 5.12'nin devamındaki paragraftan dolayı B integral kapalıdır ve Lemma 11.26'yı kullanırsak Teorem 11.25'i sadece B için kanıtlamak yeterli olacaktır. Fakat k^n'nin her noktasını orijin olarak alabiliriz. Fakat, $k[x_1, \dots, x_d]_{(x_1, \dots, x_d)}$ d-boyutlu yerel halka olduğunu zaten görmüştük. Böylece kanıt tamamlanır.

<u>Sonuç 11.27.:</u> $A(V)$'nin her m maksimal ideali için

$$\dim A(V) = \dim A(V)_m$$ olur (V indirgenemez olmak üzere).

<u>Kanıt:</u> Boyutun tanımına göre $\dim A(V) = \sup_m \dim A(V)_m$ olur. Fakat Teorem 11.25'e göre bütün yerel halkaların boyu aynıdır, $\dim A(V)_m$. Bu kanıtı tamamlar. ∎