

# DEPLASMAN TEMELLİ VE KARMA FORMÜLASYON KİRİŞ SONLU ELEMENLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Ozan SOYDAŞ, Yrd. Doç. Dr. Afşin SARITAŞ

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

**Abstract:** Analytical comparison of the displacement based and mixed beam finite elements is carried out in this study. In mixed beam element, three-field variational formulation with independent displacement, stress, and strain fields is utilized. The open source Matlab© toolbox called FEDEASLab is used in comparison of the structural systems with displacement based and mixed beam finite elements. The structural systems that the comparison is made are cantilever steel column with rectangular cross section and three bay reinforced concrete frame with several storeys. Iterative and non-iterative solution algorithms are used in the analysis of the structural systems with mixed elements and the results are compared with the results of the systems with displacement based elements. As a result, for the systems that the analysis is performed in this study, it is shown that the mixed elements with iterative method are more rapid, accurate and robust in modeling of the systems compared to the non-iterative mixed elements and displacement based elements.

**Özet:** Bu çalışmada deplasman temelli ve karma formülasyon kiriş sonlu elemanlarının analitik olarak karşılaştırması yapılmıştır. Karma formülasyon kiriş elemanında, deplasman, gerilme ve birim uzama bağımsız alanlı değişimsel formülasyon kullanılmıştır. Deplasman temelli ve karma formülasyon kiriş sonlu elemanların bulunduğu yapı sistemlerin karşılaştırmasında Matlab© programında çalıştırılabilen açık kaynak kodlu FEDEASLab isimli yardımcı yazılım kullanılmıştır. Karşılaştırmanın yapıldığı sistemler sırasıyla dikdörtgen kesitli çelik ankastre kolon ve üç açıklıklı ve birkaç katlı betonarme çerçevedir. Karma formülasyon elemanların kullanıldığı sistem analizlerinde iterasyonlu ve iterasyonsuz çözüm algoritmaları olmak üzere iki yöntem kullanılarak bunların sonuçları deplasman temelli eleman sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, bu çalışmada analizi yapılan sistemlerde, iterasyonlu çözüm yönteminin kullanıldığı karma formülasyon sonlu elemanların, iterasyonsuz karma formülasyon ve deplasman temelli sonlu elemanlara göre daha hızlı, doğru ve güvenilir sonuç verdiği ortaya konarak karma formülasyon elemanların modellemedeki avantajları gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sonlu elemanlar, deplasman temelli formülasyon, karma formülasyon, doğrusal olmayan analiz, çerçeve elemanı

## 1. GİRİŞ

Literatürde yapı analizinde kullanılan birçok metot bulunmaktadır. Bu analiz metotları çok geniş bir yelpaze teşkil etmelerine karşın uygulamadaki kolaylık ve hassasiyetlerine göre genel olarak *Makro Metotlar* ve *Mikro Metotlar* olmak üzere iki ana gruba ayrılırlar. Makro metotlar mikro metotlara kıyasla daha kolay uygulanabilmelerine rağmen mikro metotların sunduğu hassasiyeti taşımazlar. Bu nedenle, yapı analizi sırasında analizi yapılan sistemin ve analiz neticesinde istenen sonuçların hassasiyeti ve analiz için harcanacak süre göz önünde bulundurularak hangi metodun kullanılacağına dair dikkatli bir şekilde karar vermek gerekir.

Sonlu elemanlar yöntemi, diferansiyel denklemlerinin çözümü çok zor ya da mümkün olmayan gerçek fiziksel problemler için dahi yaklaşık bir çözüm sunabilen ve bu yönüyle birçok mühendislik alanında kullanılan bir mikro metottur. Yöntemin başlangıcı 1940'lara kadar gitmesine rağmen, *sonlu eleman* terimi ilk kez Clough'un makalesinde geçer ve sayısal mekanikteki ilerlemelere paralel olarak gelişimini sürdürür.

Yapı mekaniğinde sonlu elemanlar yöntemi, genellikle yapıların eleman (yerel) ve sistem (genel) düzeyinde doğrusal ve doğrusal olmayan statik ve dinamik analizlerinde kullanılan bir mikro metottur. Yöntemin altında yatan temel teori virtüel deplasmanlar ve/veya minimum toplam enerji prensibidir. Metodun birçok mühendislik alanında kullanılması nedeniyle teorisi hakkında birçok kaynak mevcuttur.

Sonlu elemanlar, deplasman temelli ve karma (melez) formülasyon olmak üzere iki ana gruba ayrılır ve hangi elemanın hangi durum için kullanılacağına, analizi yapılan sisteme bağlı olarak karar verilebilir.

Deplasman temelli kiriş elemanları, sistemin matematik modeli üzerinde belirlenen ve genellikle eleman üzerinde eşit aralıklarda seçilen düğüm noktalarındaki, sistemin yapısal davranışı da göz önünde bulundurularak belirlenen varsayımsal şekil fonksiyonları kullanılarak bulunan deplasman değerlerini, bünye denklemlerini, yükleme koşullarını, geometriyi, mesnet koşullarını, vb. kullanarak yapıya etkiyen kesit kuvvetlerini tespit etmede kullanılır. Kısacası deplasman temelli elemanlar deplasmanla alakalı denge koşullarını göz önünde bulundurur. Diferansiyel eşitlikler her zaman sağlanamasa da düğüm noktasındaki eleman dengesi her zaman için sağlanır. Diferansiyel eşitliklerin her zaman sağlanamamasının neden olduğu olumsuz durum iç kuvvetlerin yeterli doğrulukta belirlenememesidir. Çünkü, deplasman temelli elemanlar kullanılırken diferansiyel denklemlerdeki süreklilik koşulları göz ardı edilir. Sonuçlardaki hassasiyet ve doğruluğu artırmak için düğüm noktası sayısını ya da uygulamadaki bazı kolaylıklar nedeniyle genellikle polinom olarak seçilen şekil fonksiyonlarının mertebesini artırmak gerektiğinden, deplasman temelli sonlu elemanlar bazı durumlar için yetersiz kalabilir. Deplasman temelli elemanların, diyafram ve kesme kilitlenmesi ve sıkıştırılmayan ortamların analizi gibi durumlar için yetersiz kalması nedeniyle yakın tarihli araştırmalar karma elemanlar üzerinde yoğunlaşmıştır.

Karma formülasyon elemanlar, doğrusal olmayan davranışı, eleman boyunca bulunan kontrol kesitleri üzerindeki gerilme-birim uzama ilişkilerinin entegrasyonundan faydalanarak modellemeye olanak tanımaktadır. Kiriş modelinin sonlu eleman yaklaşımında, deplasman temelli elemanlardan farklı olarak kesit kuvvetleri (iç kuvvetler) için dengeyi sağlayan şekil fonksiyonları ve kiriş boyunca kesit deformasyonları kullanılır. Sadece eleman uçlarındaki düğüm noktalarındaki deplasman değerleri yeterli olacağından, kirişteki deplasman alanı için herhangi bir varsayıma ihtiyaç yoktur. Karma elemanlar değişimsel formülasyonda sadece deplasmanı değil, aynı zamanda birim gerilme ve birim uzamanın da kullanılmasıyla deplasman temelli elemanlardan ayrılır. Karma formülasyon çözümünün en çok bilinen genel formu Helinger-Reissner ve Hu-Washizu değişimsel formülasyonlarıdır. Kiriş, kabuk, plak ve diyafram gibi elemanlarda kesme kilitlenmesinin önlenmesi karma formülasyon ile sağlanabilir. Deplasman temelli elemanlarda hesaplanan deplasmanlar kilitlenme sebebiyle gerçek değerlerinden daha düşük bulunabilir fakat karma elemanlar bu sorunu ortadan kaldırmada kullanılabilir. Buna benzer duruma sıkıştırılmayan ortamların analizinde karşılaşılmaktadır ve bu durumda değişken deplasmana ek olarak basınçtır. Bunun dışında analizlerde daha az karma eleman kullanarak deplasman temelli elemanların sunduğu sonuçlardan daha hızlı ve daha hassas sonuçlar elde etmek mümkündür.

Karma elemanların formülasyonu ve uygulamaları ilgili literatürde birçok çalışma bulunmaktadır. Spacone vd. [1] kesme ve donatı sıyrılmasını ihmal ederek betonarme çerçeve elemanların elastik ötesi statik ve dinamik analizinde elemanlardaki moment ve eksenel kuvvet dengesini sağlayan karma formülasyon kiriş-kolon elemanı geliştirir. Neuenhofer ve Filippou [2] çerçeve sistemlerin deplasman temelli ve karma formülasyon sonlu elemanlar elastik olmayan malzeme davranışı ile analizini karşılaştırarak önceki çalışmalara nazaran daha etkili bir durum tespit (state determination) algoritması önerir. De Souza [3] doktora çalışmasında Neuenhofer ve Filippou'nun karma formülasyon elastik elemanını daha da geliştirerek ve elastik olmayan geniş deplasmanları da dahil ederek çerçeve elemanların analizinde karma formülasyonu kullanır. Hjeltnad ve Taciroglu [4] lineer olmayan çerçeve analizinde karma elemanların dayandığı varyasyonel prensipler hakkında çalışma yapmışlardır. Bir diğer doktora çalışmasında Sarıtaş [5], kesmenin kritik olduğu çelik ve betonarme elemanlar için eksenel kuvvet, kesme ve eğilme momentinin birbiriyle etkileşimini de göz önünde bulunduran iki boyutlu çerçeve sonlu elemanı formülasyonu sunar. Sarıtaş ve Filippou [6], üç boyutlu plastik malzeme modeli için nümerik algoritma sunar ve algoritmayı betonarme kiriş ve kolonlarda eleman düzeyinde test ederek mevcut deney sonuçlarıyla karşılaştırır. Papachridtidis vd. [7], eleman formülasyonunda Timoshenko kiriş teorisini ve eksenel kuvvet, eğilme momenti, kesme kuvveti ve burulmanın birbiriyle etkileşimini göz önünde bulunduran üç boyutlu malzeme modelini kullanarak çerçeve yapıların yüksek kesme kuvveti altında kapasitesini karma elemanlar kullanarak inceler. Çok yeni yayınlanan bir çalışmada [8], Hu-Washizu fonksiyoneli kullanılarak üç boyutlu bir çerçeve elemanı geliştirilmiş ve bu elemanda her bir düğüm noktasında üç düz hareket ve üç dönme hareketinin dışında ek serbestlik dereceleri dikkate alınmış ve nonlineer davranış modellenmiştir.

Yukarıda sunulan kaynakçalardan da görüldüğü gibi nonlineer analizler için karma formülasyon çerçeve elemanlarının geliştirilmesi ve kullanımı daha da artmaktadır ve bu modelleme yönteminin özellikle de çözümleme hızı ve doğruluğu üzerinde özet bir çalışma yapılmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

## 2. NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölümde deplasman temelli ve karma formülasyon sonlu elemanların iki farklı sistem için karşılaştırması yapılmıştır. İlk sistem basit çelik ankastre kolon ve ikinci sistem üç 3 açıklıklı ve 2, 3 ve 4 katlı olarak değişen çerçeve sistemlerdir. Deplasman temelli ve karma formülasyon kiriş sonlu elemanların bulunduğu yapı sistemlerin karşılaştırmasında Matlab© programında çalıştırılabilen açık kaynak kodlu FEDEASLab isimli yardımcı yazılım kullanılmıştır. Takip eden bölümlerde konuyla ilgili detaylar, sonuçlar ve sonuçlar hakkındaki yorumlar açıklanmıştır.

### 2.1. Çelik Ankastre Kolon

Tabanı ankastre olan dikdörtgen kesitli çelik bir kolon tepe noktasındaki yatay kuvvet artırılarak yüklenmiştir. Analizler, deplasman temelli ve karma formülasyon sonlu elemanlar arasındaki hassasiyet ve güvenilirlik karşılaştırması amacıyla yapılmıştır. Bunun yanında iterasyonlu ve iterasyonsuz çözüm algoritmaları karma elemanlar da birbiriyle karşılaştırılmıştır.

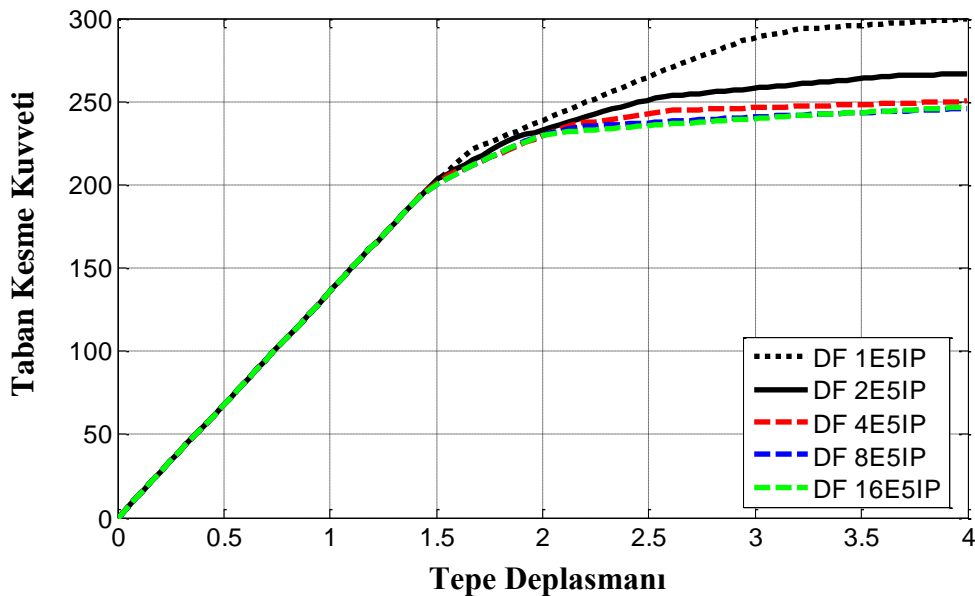
Çeliğin tek eksenli davranışı için ardışık doğrusal (bilineer) gerilme-birim uzama ilişkileri olduğu varsayılmıştır. Analizin amacı niceliklerin kendisinden çok niceliklerdeki değişimlerin

belirlenmesi olduğu için birimsiz olarak incelenmiştir. Kolonun uzunluğu 120, derinliği 15 ve genişliği 10 birim alınmıştır. Çeliğin elastisite modülünün 29000, akma dayanımının 50 birim olduğu varsayılmıştır. Analizlerde eleman geometrisinin doğrusal olduğu kabul edilmiştir. Kesit, orta nokta integral kuralı kullanılarak birkaç tabakaya bölünmüştür. Kiriş elemanının davranışı, kiriş üzerindeki çeşitli kesitlerdeki tepkilerin dahil edilmesiyle elde edilmiştir. Kesitlerin yerinin belirlenmesinde *Gauss-Lobatto* yöntemi kullanılmıştır.

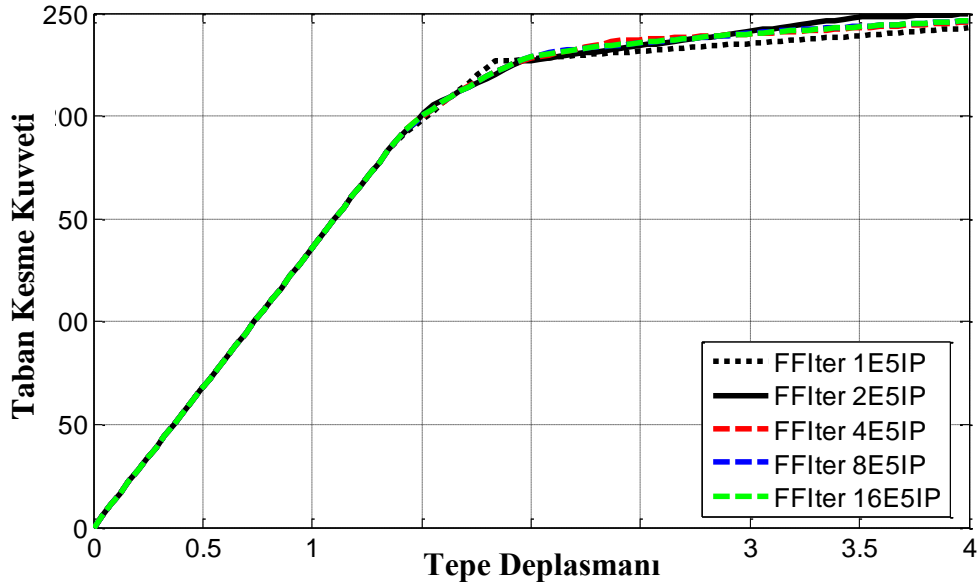
Çelik kolon boyunca değişik sayıda deplasman temelli elemanlar kullanılarak elde edilen ve kesit üzerindeki tabaka sayısı 5 olarak sabit tutulan analiz sonuçları Şekil 1’de verilmiştir. Şekil üzerinde deplasman temelli-*DF*, eleman sayısı-*E*, kesitteki katman sayısı-*IP* olarak kısaltılmıştır. Analiz sonuçlarına göre çelik ankastre kolon örneğinde global davranışı doğru olarak yakalayabilmek için en az 4 tane deplasman temelli eleman kullanılması gerekmektedir. Şekilde gösterilmemesine rağmen, kesit üzerindeki katman sayısını artırmak sonuçlardaki doğruluk hassasiyetini iyileştirememektedir.

İterasyonlu ve iterasyonsuz çözüm algoritması kullanılan karma formülasyon analiz sonuçları aynı doğrusal olmayan davranışı vermektedir. Gözlemlenen tek fark analiz süresinin iterasyonlu analizde, iterasyonsuz analizden daha kısa olmasıdır. Sonuçlar Şekil 2’de verilmiştir. Şekil üzerinde iterasyonlu karma formülasyon-*FFIter* olarak kısaltılmıştır. Şekle göre, kesitinde 5 katman kullanılan tek elemanlı karma formülasyon global davranış için makul seviyede bir hassasiyet sağlamaktadır.

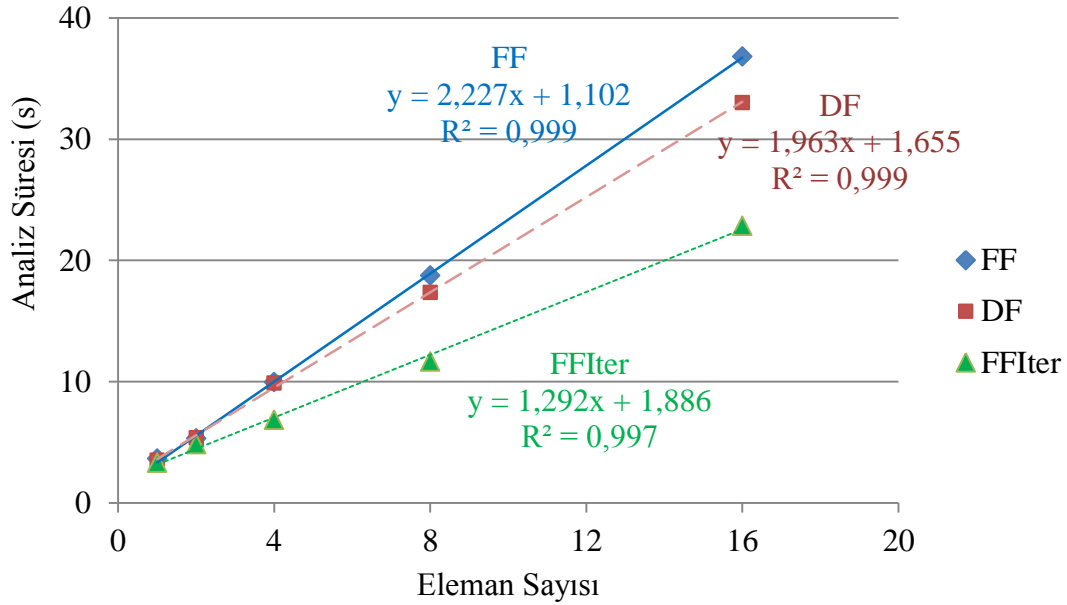
Çelik ankastre kolon için *DF*, *FF* ve *FFIter* formülasyon sonlu eleman analizlerinin çözüm süreleri Şekil 3’te karşılaştırılmıştır. Şekil üzerindeki noktaların dağılımı doğrusal olarak yakınsanmıştır. Şekilden de anlaşılacağı üzere, *FFIter* en hızlı sonucu veren formülasyon olmasına rağmen şu da unutulmamalıdır ki ankastre kolon örneği için karma formülasyonda eleman sayısını çok fazla artırmaya gerek yoktur; çünkü tek eleman bile yeterli hassasiyette sonuç vermektedir. Bunun yanında, deplasman temelli eleman kullanıldığında yeterli hassasiyet ancak 4 tane elemanın kullanılmasıyla sağlanabilmektedir. Bu da zaman olarak düşünüldüğünde karma formülasyona göre 3 kat daha fazla bir süreye tekabül etmektedir. Bu sonuç da karma formülasyonun gücünü ve güvenilirliğini gösterir.



**Şekil 1.** Değişik Sayıdaki Deplasman Temelli Sonlu Elemanlı Çelik Ankastre Kolon için Taban Kesme Kuvvetinin Tepe Deplasmanı ile Değişimi



Şekil 2. Değişik Sayıdaki İterasyonlu Karma Formülasyon Sonlu Elemanlı Çelik Ankastre Kolon için Taban Kesme Kuvvetinin Tepe Deplasmanı ile Değişimi

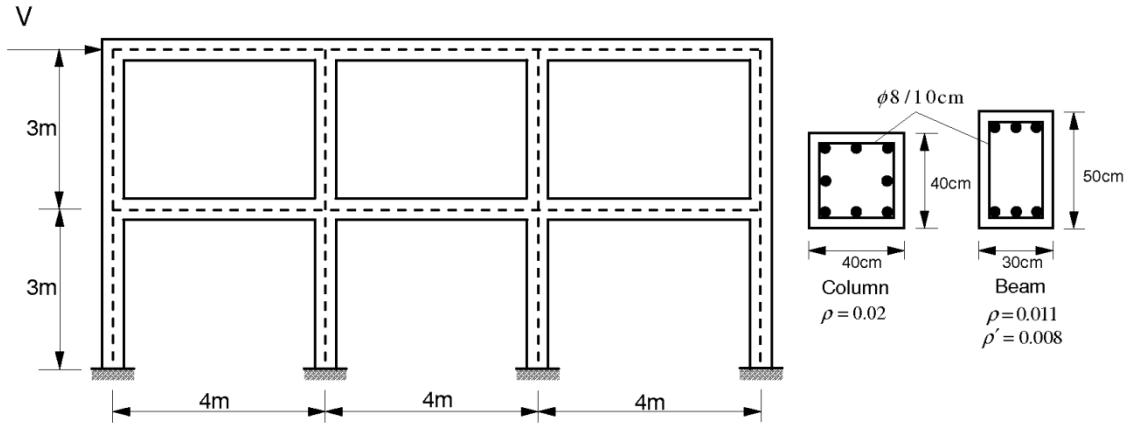


Şekil 3. DF, FF ve FFIter ve 5 IP için Analiz Sürelerinin Karşılaştırılması

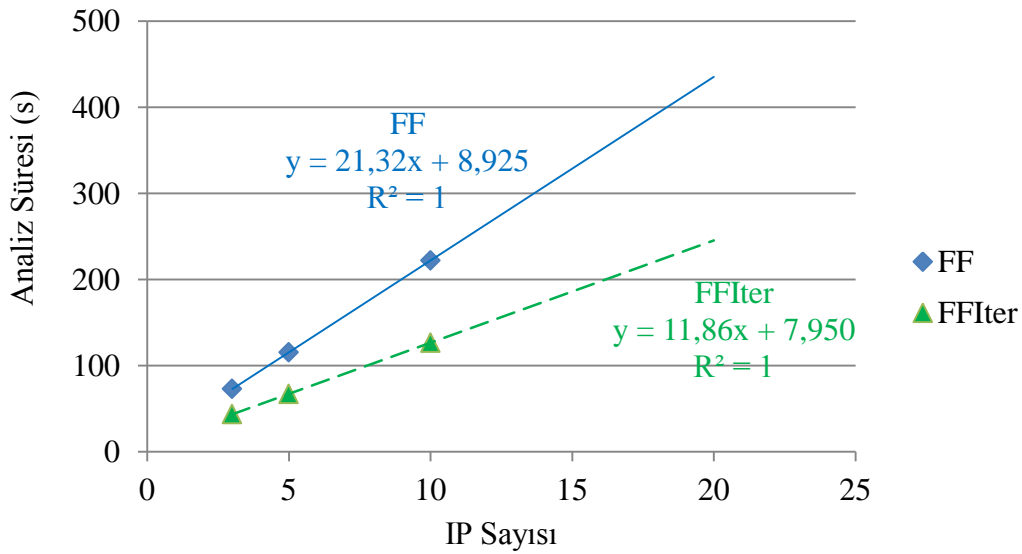
## 2.2. Betonarme Çerçeve Sistem

3 açıklıklı ve 2, 3, ve 4 katlı çerçeve sistemlerin analizi yapılarak iterasyonlu ve iterasyonsuz karma formülasyon sonlu elemanların karşılaştırması yapılmıştır. Kat yüksekliği bütün analizlerde 3m alınmış olup 2 katlı çerçevenin geometrik özellikleri Şekil 4'te verilmiştir.

Çerçevede kullanılan her kiriş ve kolon tek karma elemanla ve eleman boyunca değişen sayıda ve kontrol kesitlerindeki Gauss-Lobatto integral noktalarıyla temsil edilmiştir. Her kesit 5 beton katmanına bölünmüştür. Kesit tesirlerini ve tanjant rijitliklerini elde etmek için orta nokta integral kuralı kullanılmıştır. Betonun gerilme-birim uzama ilişkilerini tanımlamak için doğrusal olmayan tek eksenli malzeme modeli kullanılmıştır. Bu örnekte betonun çekme dayanımının olmadığı kabul edilmiştir. Analizlerdeki bütün kolon ve kirişlerin basınç dayanımı 20MPa, maksimum basınç dayanımındaki birim uzama 0.002 ve maksimum birim uzama 0.008 olarak alınmıştır. Donatılar, 0.1% pekleşme oranlı bilineer malzemeli olarak modellenmiştir. Çeliğin elastisite modülü ve çekme dayanımı sırasıyla 200GPa ve 220MPa olarak alınmıştır. Şekil 4'te gösterildiği gibi tepede yatay bir kuvvet uygulanıp, tepe düğüm noktalarına eşit olarak dağıtılmıştır.



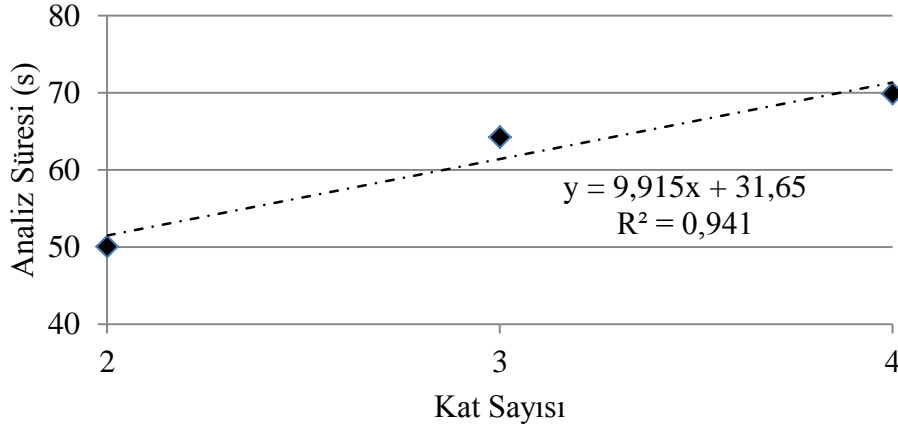
Şekil 4. İki Katlı Üç Açıklıklı Betonarme Çerçeve Sistem



Şekil 5. Dört Katlı ve Üç Açıklıklı Çerçeve Sistemlerin FF ve FFIter Formulasyon için Analiz Sürelerinin Karşılaştırılması

Açıklık başına bir eleman ve değişik sayıda kesit katmanına sahip 4 katlı ve 3 açıklıklı çerçeve sistemlerin FF ve FFIter formulasyon için analizi yapılarak analiz süreleri karşılaştırılmıştır (Şekil 5). Şekil üzerindeki noktaların doğrusal olarak yakınsanmıştır. Sonuçlar incelendiğinde, FF ve FFIter'in her ikisi için de çözüm süresi IP ile

doğrusal olarak artmaktadır ve FFilter, FF'e göre neredeyse yarı zamanda çözüme ulaşmaktadır. Ek olarak, FFilter'in çözüm süresinin kat sayısına göre değişimi de doğrusal bir seyir izlemektedir (Şekil 6). Sonuçlardan anlaşılacağı gibi çözüm süresindeki artış, problemin boyutlarındaki artışla orantılı olarak büyümektedir ve karma formülasyon elemanlar çerçeve sistemler gibi nispeten daha karmaşık sistemlerin doğrusal olmayan davranışı için de hassas ve güvenilir sonuçlar vermektedir.



Şekil 6. FFilter ve 5 IP için Analiz Süresinin Kat Sayısına Göre Değişimi

### 3. SONUÇLAR

Bu çalışmada iki farklı yapısal sistem kullanılarak deplasman temelli ve karma formülasyon giriş sonlu elemanlarının analitik olarak karşılaştırması yapılmıştır. Analiz sonuçlarına göre karma elemanlar deplasman temelli elemanlara göre daha az eleman sayısı kullanılan durumlarda bile daha hızlı ve aynı zamanda güvenilir sonuçlar verebilmektedir.

### 4. KAYNAKLAR

- [1] E. Spacone, F.C. Filippou, F.F. Taucer, Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 25 (1996) 711-725.
- [2] A. Neuenhofer, F.C. Filippou, Evaluation of nonlinear frame finite-element models, Journal of Structural Engineering-ASCE, 123 (1997) 958-966.
- [3] R.M. de Souza, Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames. University of California, Berkeley, 2000.
- [4] K.D. Hjelmstad, E. Taciroglu, Variational basis of nonlinear flexibility methods for structural analysis of frames, J. Eng. Mech.-ASCE, 131 (2005) 1157-1169.
- [5] A. Saritas, Mixed Formulation Frame Element for Shear Critical Steel and Reinforced Concrete Members, Ph.D. Dissertation. University of California, Berkeley, 2006.

[6] A. Saritas, F.C. Filippou, On the Numerical Integration of a Class of Plastic-Damage Constitutive Models: 3d Formulation and Condensation of 3d Stress-Strain Relations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 31 (2009) 2327-2336.

[7] A. Papachristidis, M. Fragiadakis, M. Papadrakakis, A 3D fibre beam-column element with shear modelling for the inelastic analysis of steel structures, *Comput. Mech.*, 45 (2010) 553-572.

[8] J. Wackerfuss, F. Gruttmann, A nonlinear Hu-Washizu variational formulation and related finite-element implementation for spatial beams with arbitrary moderate thick cross-sections, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 200 (2011) 1671-1690.