



FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELİ KİRİŞLERİN KARMA FORMÜLASYON SONLU ELEMANLARLA MODELLENMESİ

Afşin Sarıtaş¹, Tolga Gürol¹

¹ İnşaat Mühendisliği Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

ABSTRACT

In this study a new mixed formulation element based on Hu-Washizu-Barr functional is presented for vibration and inelastic analysis of beams with functionally graded material (FGM). Distributions of stiffness and mass over a FGM beam are accurately modeled for both elastic and inelastic material responses by the use of force interpolation functions, which also allows vibration analysis without any need for specification of displacement field. Von Mises plasticity model with isotropic and kinematic hardening parameters is assigned for steel and the ceramic materials behaves according to Drucker-Prager yield criteria. 3d stress-strain relations are solved by general closest point projection algorithm, and then condensed to the dimensions of the beam element to get the effective FGM material response. Numerical examples and verification studies on proposed element demonstrate accuracy and robustness under inelastic material response as well as on capturing fundamental, higher and mix modes of vibration frequencies and shapes.

ÖZET

Bu çalışmada, Hu-Washizu-Barr fonksiyoneline dayanan karma formülasyonlu kiriş elemanı türetilmiştir. Geliştirilen eleman fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) oluşan kirişlerin titreşim ve doğrusal olmayan malzeme davranışlarının modellenmesinde kullanılacaktır. Eleman formülasyonunda FDM'den dolayı oluşacak rijitlik ve malzeme dağılımındaki farklılıklar karma formülasyonda kuvvet bazlı yaklaşım yapılması sayesinde kiriş tepkisi elastik ve elastik olmayan durumlar altında gerçekçi olarak modellenebilmiştir. Bu yöntemle hesaplanan tutarlı kütle matrisinde herhangi bir şekilde deplasman enterpolasyonu yapılmasına gerek kalmamıştır. Çelik malzemesi için kinematik ve izotropik pekleşmeli Von Mises plastisite modeli, seramik malzemesi içinse Drucker-Prager plastisite modeli kullanılmıştır. Üç boyutlu gerilme-birim şekil değiştirme denklemleri en yakın genel nokta projeksiyonu algoritması kullanılarak etkin gerilme değerleri kiriş probleminin boyutlarına indirgenmiştir. Sayısal örnekler ve doğrulama çalışmaları, elastik olmayan malzeme davranışının modellenmesi ve ayrıca temel ve yüksek mertebe titreşim modlarının ve şekillerinin tespitinde başarılı olduğunu göstermektedir.

GİRİŞ

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) üretme fikri, farklı özelliklerdeki iki malzemenin fiziksel, mekanik ve termal özelliklerini en verimli şekilde koruyarak kullanmaktan esinlenmiştir. FDM üretme ve tasarım süreçlerinin gelişimi ile ilgili ilk fikir teorik olarak yaklaşık 30 yıl önce ortaya çıkmıştır. FDM'nin gelişim süreçleri ile ilgili detaylı bilgi [1]'deki literatür taramasında verilmiştir. Bu malzemenin savunma sanayi, havacılık,

enerji sektöründe ve genel olarak teknolojik uygulamalarda ilgi gören kullanım alanı bulunmaktadır. FDM'nin daha etkin bir malzeme olarak kullanılabilmesi için üretim tekniklerinin yanında, bu malzemeyle üretilecek yapıların analizlerinin yürütülebilmesi için analiz yöntemleri de yoğun olarak çalışılmaktadır. Bu kapsamda en çok dikkate alınan çözümlene yöntemi elastisite teorisine dayanmakta ve uygulanan yüklerle sınır şartlarına bağlı çözümler yapılmaktadır [2-4]. Bu tip çözüm yöntemleri yerine, sonlu elemanlar yöntemi kullanarak bu kısıtlamalardan kurtularak hem doğrusal hem de doğrusal olmayan tipteki malzeme davranışları altında analizler yapabilmek mümkündür.

Bu bildiride sunulan çalışmada, kiriş tipi sonlu elemanlarla FDM malzemesinden üretilen yapı elemanlarının hem titreşim davranışlarının hem de doğrusal olmayan elastik davranışlar altındaki tepkilerinin hesaplanabilmesi için bir üretim yapılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çalışmalarda iki farklı yöntem takip edilmektedir. Bunlardan ilki ve en popüler olanı deplasman-temelli formülasyonlardır. Bu kapsamda FDM kirişler için sonlu eleman geliştirilmesi ilk kez Chakraborty v.d. [5] tarafından yapılmıştır. Bu makalede geliştirilen eleman daha sonraki yıllarda benzer tipteki formülasyonla farklı çalışmalar ve makalelerde ileriye çalışılmaya çalışılmıştır [6, 7]. Kiriş sonlu elemanların üretimi açısından ikinci takip edilebilecek yöntemse karma formülasyon yöntemidir. Bu yöntemin betonarme ve çelik yapı elemanlarının analizlerinde başarılı bir şekilde kullanıldığı bilinmektedir [8-10]. Bu arada literatürde FDM'nin doğrusal olmayan davranışının modellenmesine yönelik çok az çalışma tespit edilebilmiştir. FDM'de kullanılan seramik tipteki kısmın Drucker-Prager, metalik kısmınsa Von Mises (J_2) akma fonksiyonlarının kullanımı ile modellenebileceği belirtilmektedir [11].

Bu bildiride sunulan çalışmada, Hu-Washizu-Barr fonksiyoneline dayanan karma formülasyon bir çerçeve elemanı geliştirilmiş ve elemanın tutarlı kütle matrisi ile rijitlik matrisi elde edilmiştir. Geliştirilen elemanın doğrusal olmayan elastik malzeme davranışını yakalanabilmesi için Drucker-Prager ve Von Mises plastisite modelleri kullanılmıştır. Titreşim davranışının elde edilebilmesi içinse tutarlı kütle matrisi kuvvet bazlı bir formülasyonla elde edilmiştir. Geliştirilen eleman deplasman-temelli elemanlarla karşılaştırılmış ve ayrıca titreşim modları ve şekilleri de ANSYS sonlu elemanlar programı kullanılarak doğrulanmıştır.

ELEMAN FORMÜLASYONU

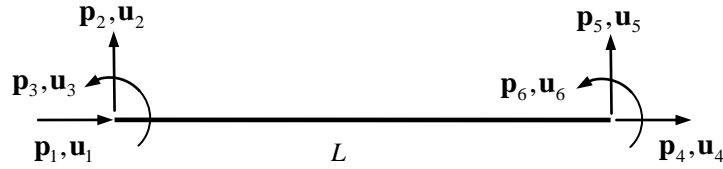
Geliştirilen eleman Timoshenko kiriş teorisine dayanmakta ve 3 alanlı karma formülasyon Hu-Washizu-Barr fonksiyoneli kullanılarak eleman tepkisi türetilmektedir. Kuvvet-bazlı enterpolasyon fonksiyonları kullanılarak hem elastik ve hem de elastik olmayan davranışlar altında gerçekçi modellemeler yapılmıştır. Eleman üretimi aşağıda sunulan Hu-Washizu varyasyonelinin Barr tarafından yapılan uzatma ile dinamik durumları da içeren halini sunmaktadır.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW} = & \int_0^L \delta\mathbf{e}^T (\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{e}(x)) - \mathbf{b}(x, L)\mathbf{q} - \mathbf{s}_p(x)) dx - \delta\mathbf{q}^T \int_0^L \mathbf{b}^T(x, L)\mathbf{e}(x) dx + \delta\mathbf{q}^T \mathbf{a}_g \mathbf{u} \\ & + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{a}_g^T \mathbf{q} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} - \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}_{app} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

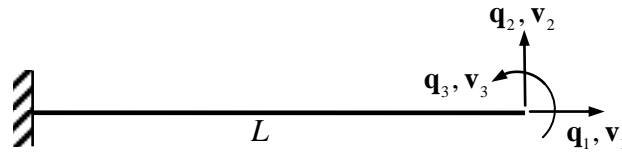
Yukarıdaki denklemde sunulan \mathbf{u} alanı düğüm noktalarındaki deplasmanları, \mathbf{q} alanı eleman uçlarına etkiyen kuvvetleri, \mathbf{e} alanı ise kesit deformasyonlarını belirtmektedir. Diğer parametrelerden en önemlisi \mathbf{b} ise kuvvet-temelli enterpolasyon fonksiyonlarını içermektedir. Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan durumlar için yukarıda verilen denklemler çözümlenerek eleman tepkisi elde edilmiştir. Denklem 1'de sunulan \mathbf{m} ise tutarlı kütle matrisini ifade etmektedir. Bu çalışmada gene kuvvet-temelli formülasyon kullanılarak ve

deplasman enterpolasyon fonksiyonlarına ihtiyaç duyulmadan \mathbf{m} tutarlı kütle matrisi elde edilebilmiştir. Kiriş elemanının tutarlı kütle matrisi \mathbf{m} 'nin türetimi açısından Soydaş [12]'in tezinde sunulan türetim bu çalışmada FDM'ye uyarlanmıştır ve bu bildiriye bu hususta detaylı sunum yapılmayacaktır.

Denklem (1)'de sunulan tüm alanlarla ilgili sunum aşağıda anlatılmaktadır ve daha detaylı türetim için [13]'e bakınız.



Şekil 1. Komple sistemde eleman düğüm kuvvet ve deplasmanları



Şekil 2. Temel sistemde eleman kuvvet ve deplasyonları

Denklem 1'de sunulan formülasyonda, eleman türetimi açısından temel sistemin kullanılması gerekmektedir. Temel sistemde, eleman tepkileri rijit hareket modlarından arındırılmıştır. Kiriş elemanının Şekil 1'de sunulan komple sistemdeki durumunda düğüm noktalarında var olan 3'er serbestlik derecesinden yani toplamda 6 serbestlik derecesinden 3 adet rijit modun çıkarılması ile Şekil 2'deki temel sistem elde edebilir. Bu çalışmada temel sistem olarak konsol kiriş durumu dikkate alınmıştır. Bu dönüşümü sağlayan denklem aşağıda sunulmuştur.

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\mathbf{u} \quad \text{ve} \quad \mathbf{p} = \mathbf{a}^T\mathbf{q}; \quad \text{burada} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Kiriş üstünde herhangi bir kesitteki iç kuvvetler (eksenel kuvvet $N(x)$, kesme kuvveti $V(x)$ ve eğilme momenti $M(x)$) değerleri Şekil 2'deki temel sistemde sunulan eleman temel kuvvetleri \mathbf{q} 'dan aşağıdaki denklemle elde edilebilir. Bu denklemde $\mathbf{s}_p(x)$ sabit yayılı yükler altında kesitte oluşacak değerleri temsil etmektedir ve istenirse bu türetim farklı tipteki eleman içi kuvvetler için de geliştirilebilir.

$$\mathbf{s}(x) = \begin{bmatrix} N(x) & V(x) & M(x) \end{bmatrix}^T = \mathbf{b}(x, L)\mathbf{q} + \mathbf{s}_p(x)$$

$$\mathbf{b}(x, L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (L-x) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{s}_p(x) = \begin{bmatrix} L-x & 0 \\ 0 & L-x \\ 0 & (L-x)^2/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Denklem 1'deki kesit deformasyonları \mathbf{e} ise kesit üstündeki aksenal deformasyon $\varepsilon_a(x)$, kayma deformasyonu $\gamma(x)$ ve kesit eğriliği $\kappa(x)$ 'den oluşmaktadır. Kesit üstündeki normal

ve kayma birim deformasyonları kesit deformasyonu vektörü \mathbf{e} 'den aşağıdaki denklemle elde edilir.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{a}_s(y, z) \mathbf{e}(x) \quad \text{ve} \quad \mathbf{a}_s(y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Kesit üstünde hesaplanan birim deformasyonlardan, kesit tepkisi fiber model kullanılarak aşağıdaki denklemde sunulduğu üzere hesaplanabilir.

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{e}) = \int_A \mathbf{a}_s^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dA \quad \text{ve} \quad \mathbf{k}_s = \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \mathbf{e}} = \int_A \mathbf{a}_s^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{a}_s dA \quad (5)$$

Bu denklemde $\boldsymbol{\sigma}$ değeri normal gerilme σ_x ve kayma gerilmesi τ_{xy} 'dan oluşur. Eğer malzeme tepkisi doğrusal elastik ise bu değerler $\sigma_x = E \varepsilon_x$ ve $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$ olarak elde edilir.

Kiriş elemanı üstünde FDM'nin dağılımı 1) sadece aksel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş, 2) sadece kesit derinliğinde fonksiyonel derecelendirilmiş, 3) karma derecelendirilmiş, olarak düşünülebilir. Bu dağılım tiplerinden en çok kesit derinliğinde fonksiyonel derecelendirilmiş durum çalışılmaktadır ve bu bildiride de bu durumla ilgili karşılaştırmalar yapılması dikkate alınmıştır. FDM malzemelerde dağılım tipleri [14]'de sunulan eksponansiyel ilişki ile ya da [15] ve [16]'da sunulan power ilişkisi ile aşağıdaki denklemde sunulduğu üzere elde edilebilir.

Eksponansiyel

$$\wp(y) = \wp_{üst} \exp\left(-\delta \left(1 - \frac{2y}{h}\right)\right) \quad \text{ve} \quad \text{Power} \quad \wp(y) = (\wp_{üst} - \wp_{alt}) \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + \wp_{alt} \quad (6)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\wp_t}{\wp_b}\right)$$

Bu denklemde $\wp(x)$ kesit derinliğindeki malzeme için elastisite modülü, kayma modülü, ısıl genişleme katsayısı, kütle yoğunluğu gibi değerleri temsil eder ve kesit üstündeki $\wp_{üst}$ ve \wp_{alt} değerlerinden elde edilir.

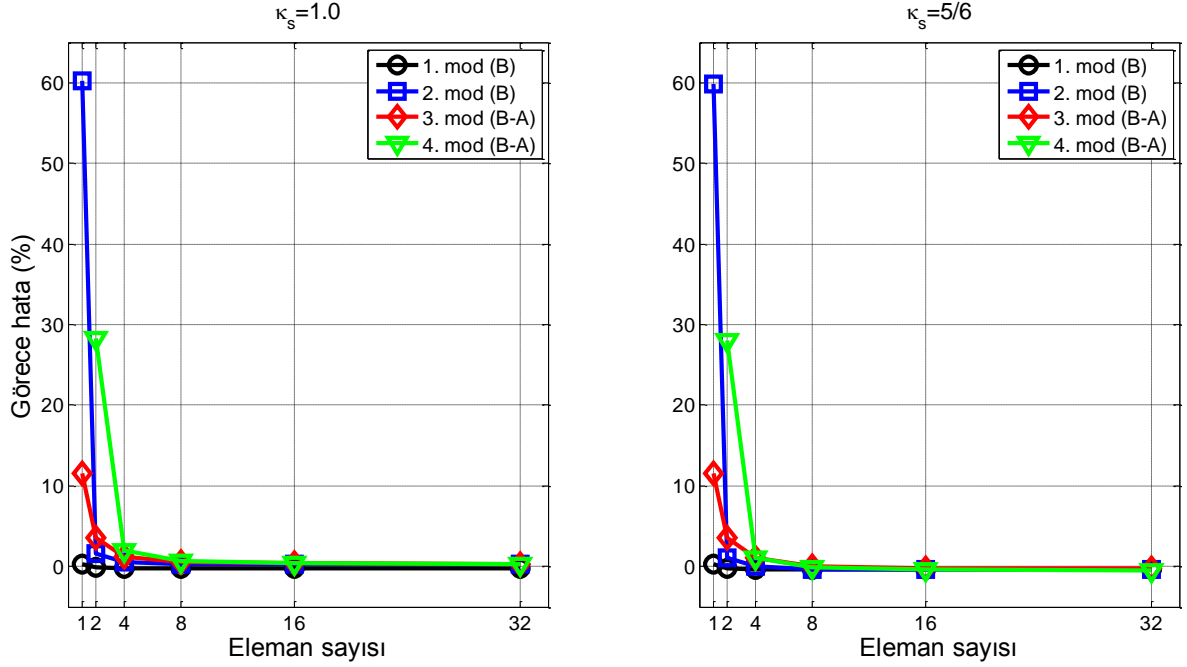
DOĞRULAMA ve KARŞILAŞTIRMA ÇALIŞMALARI

Bu kısımda derinlik boyunca derecelendirilmiş FDM kirişlerin doğrusal olmayan elastik davranışı ve titreşim özellikleri çalışılmıştır. İlk örnek olarak konsol kiriş problemi 4 katmanlı FDM'den oluşacak şekilde ANSYS'de modellenmiştir ve aynı çalışma bu makalede sunulan eleman kullanılarak da analiz gerçekleştirilmiştir.

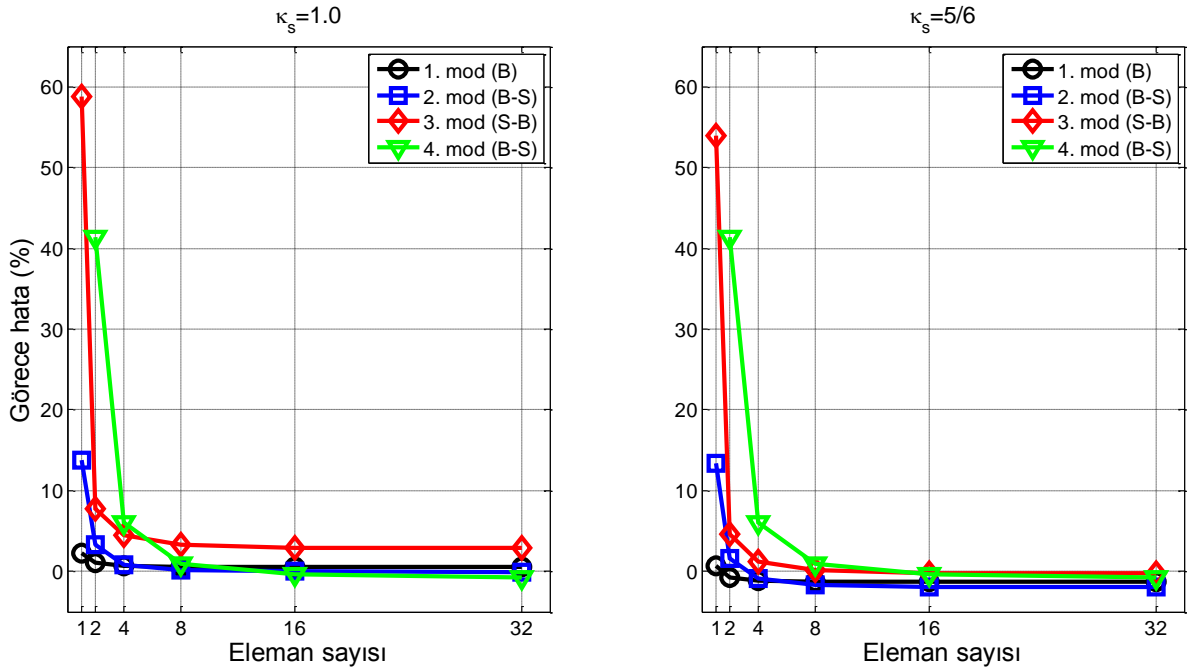
Kirişin uzunluk/derinlik oranı (L/d) 10, 5 ve 2, derinlikse 100 mm alınmıştır. ANSYS sonuçları 4-düğümlü düzlem elemanlar kullanılarak ve eleman boyu 5 mm seçilerek titreşim frekansları kesine yakın gerçekçi elde edilebilmiştir. Çelik malzemesinin özellikleri: E = 210 GPa, G = 80 GPa, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, alumina malzemesi ise E = 390 GPa, G = 137 GPa, $\rho = 3950 \text{ kg/m}^3$ alınmıştır.

Şekil 3 ve 4'te FDM kiriş için, geliştirilen elemanda kullanılan eleman sayısı artırıldıkça ANSYS'in kesin sonuçlarına yakınsama özelliği sunulmuştur. Bu karşılaştırma ilk 4 mod dikkate alınarak yapılmıştır. Şekillerde solda düzeltme katsayısı yapılmamış, sağda ise 5/6 düzeltme katsayısı yapılarak yürütülen analizlerin sonuçları gösterilmiştir. Bilindiği üzere 5/6

katsayısı homojen dikdörtgen kesitlerde geçerli olan bir değerdir. Elde edilen sonuçlarda görüldüğü üzere, geliştirilen eleman temel titreşim modunu tek elemanla bile gerçekçi olarak yakalayabilmektedir. Ayrıca artırılan eleman sayısı ile yüksek titreşim modlarının doğru olarak hesaplanabilmesi de mümkün olmaktadır. Kısa kiriş durumundaysa, düzeltme katsayısının 5/6 kullanılması titreşim modlarından düşük değerler hesaplanmasına sebep olmaktadır. Bu çalışmada sunulan tüm analizlerin sonuçlarının detayı [13]'de mevcuttur.

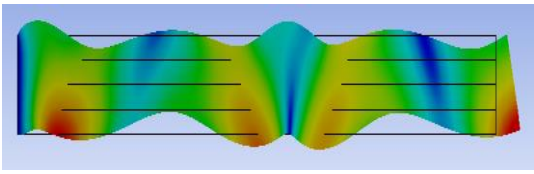
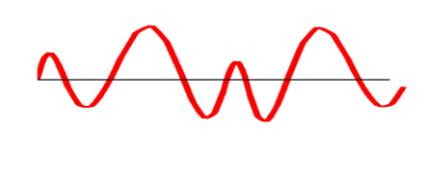
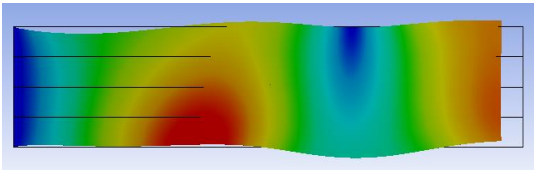
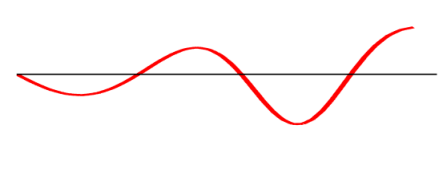
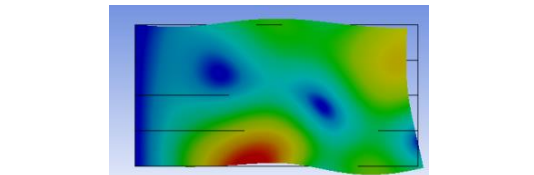
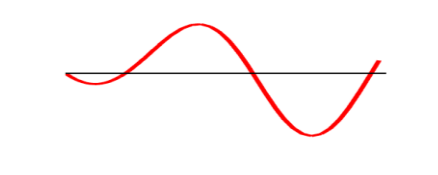


Şekil 3. Geliştirilen elemanın yakınsaması: FDM kiriş $L/d = 10$ (A: Eksenel, B: Eğilme)



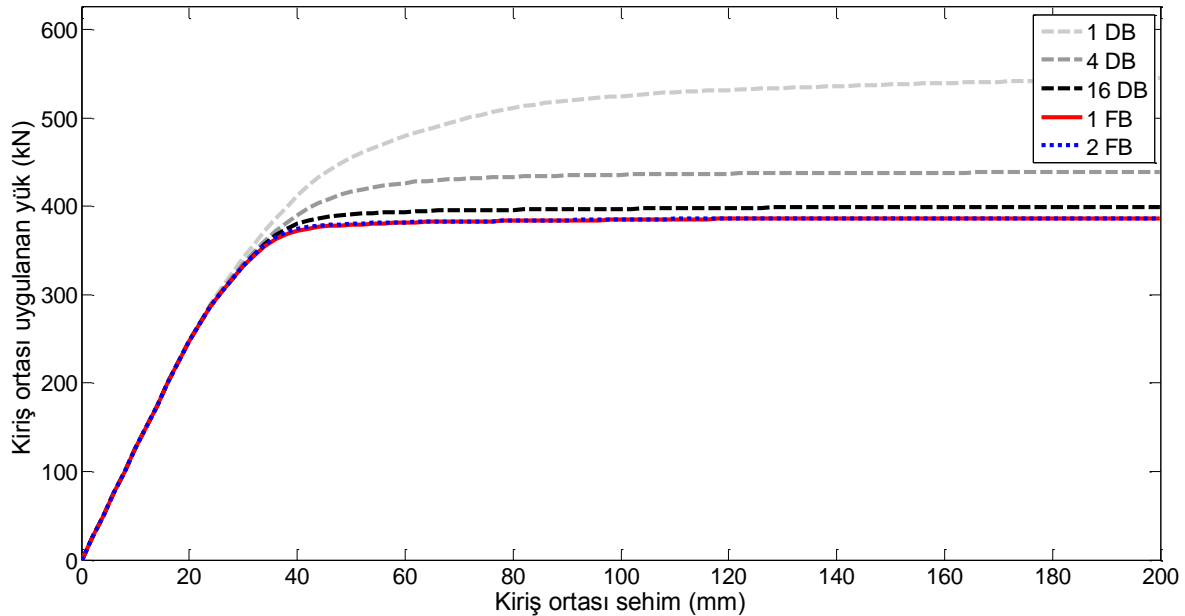
Şekil 4. Geliştirilen elemanın yakınsaması: FDM kiriş $L/d = 2$ (B: Bending, S: Kesme)

Şekil 5'te ise geliştirilen eleman ile ANSYS analizlerinden elde edilen mod şekilleri sunulmuştur. Görüldüğü üzere, geliştirilen eleman karmaşık mod şekillerini bile gerçekçi olarak yakalayabilmektedir.

ANSYS Çözümü	Geliştirilen Eleman Çözümü
 <p>L/d=10 - Mod 12: 12231 Hz</p>	 <p>L/d=10 - Mod 12: 12449.4 Hz</p>
 <p>L/d=5 - Mod 6: 10634.0 Hz</p>	 <p>L/d=5 - Mod 6: 10688 Hz</p>
 <p>L/d=2 - Mod 5: 23908 Hz</p>	 <p>L/d=2 - Mod 5: 25676 Hz</p>

Şekil 5. Farklı konsol kiriş uzunlukları altında örnek titreşim modları ve şekilleri

İkinci karşılaştırmadaysa, FDM kirişin elastik olmayan davranışı dikkate alınmıştır. Çelik malzemesi için Von-Mises plastisite modeli, alümina malzemesi içinse Drucker-Prager plastisite modeli kullanılmıştır. Böylece 3 boyutlu gerilme ve birim şekil değiştirme ilişkisi tanımlanmıştır. Üç boyutlu gerilme-birim şekil değiştirme denklemleri en yakın genel nokta projeksiyonu algoritması kullanılarak etkin gerilme değerleri kiriş probleminin boyutlarına indirgenmiştir.

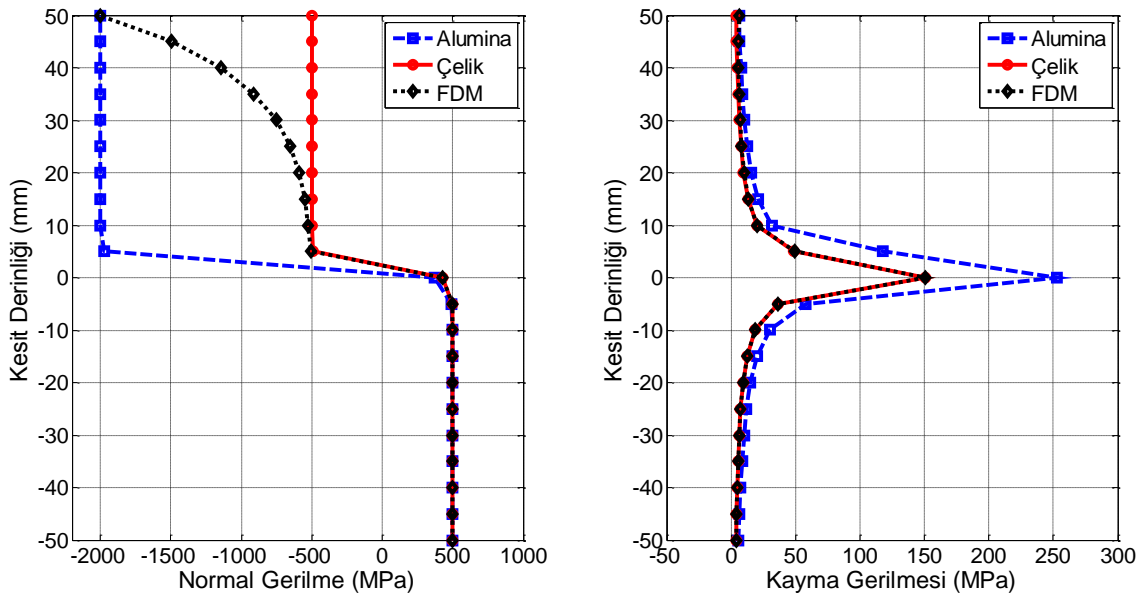


Şekil 6. Kiriş ortasına uygulanan yükün, kiriş ortasında oluşan sehime göre değişimi

Doğrulama açısından, her iki ucundan basit mesnetlenmiş bir kiriş örneği dikkate alınmış ve kiriş uzunluğu 2 m, derinliği ise 100 mm alınmıştır. Kiriş ortasından yukarıdan yükleme

yapınca, kirişin üst kısmı alümina ve alt kısmı ise tamamen çelik olması yüzünden, kiriş eğilirken aksel yükler oluşmuştur. Yukarıda alüminadan aşağıda çeliğe malzeme geçişi eksponansiyel olarak $n=8$ katsayısı ile dikkate alınmıştır. Çelik malzemesinin özellikleri: $E = 210$ GPa, $G = 80$ GPa, akma değeri $\sigma_y = 500$ MPa; alümina malzemesi içinse $E = 390$ GPa, $G = 137$ GPa, $\sigma_{y,basınç} = 2000$ MPa and $\sigma_{y,çekme} = 250$ MPa alınmıştır.

Derinlik boyunca her bir malzemenin birbirine kenetlendiği varsayımıyla, FDM için etkin malzeme gerilmeleri hesaplanmıştır. Örnek olarak ortasından yüklenmiş her iki ucu da basit mesnetli bir kirişin orta kesitinden yüklendiği durum için geliştirilen elemanla (FB) yapılan analizlerin sonucu ve Chakraborty v.d.[5]'nin deplasman temelli elemanın (DB) verdiği sonuçlar Şekil 6'da sunulmuştur. Görüldüğü üzere, geliştirilen elemanın tek eleman tepkisi kesin sonuçlar verirken, deplasman-temelli eleman 16 elemanla dahi doğru sonucu tam tespit edememektedir. Analiz sonunda, geliştirilen eleman için derinlik boyunca oluşan gerilme dağılımı aşağıda sunulmuştur. Görüldüğü üzere, kesit ortasında kayma gerilmelerinde çok ciddi bir artış olmaktadır.



Şekil 7. Ortasından yüklenmiş her iki ucu basit mesnetli kirişin ortasındaki kesitte derinlik boyunca oluşan normal ve kayma gerilmesi dağılımı

SONUÇLAR

Yapılan karşılaştırmalar sonucunda, geliştirilen karma formülasyon kiriş elemanının FDM analizleri için deplasman-temelli elemanlara göre çok daha yüksek doğrulukta elastik ve elastik olmayan davranışı yakalamada başarı elde ettiği görülmüştür. Geliştirilen elemanla sadece bir eleman kullanımıyla elde edilen sonucun deplasman-temelli elemanlarla ancak 32 eleman ve daha fazla eleman kullanımıyla elde edilebildiği görülmüştür. Titreşim frekansları ve ayrıca mod şekilleri açısından da ANSYS ile yapılan karşılaştırmalarda doğru modelleme yapılabildiği ve karmaşık eğilme, aksel davranış ve kesmenin etkileşiminin dahi olduğu durumların yakalanabildiği görülmüştür. Özellikle de kiriş uzunluğu/derinliği oranı 10 ve 5 için elde edilen titreşim frekanslarındaki hatanın çok daha düşük olduğu görülmüştür. Bu oran 2'ye gelince ise artık kiriş formülasyonunun üç boyutlu ANSYS analizi sonuçlarından elde edilen değerlere göre daha fazla hata payı içerdiği tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Jha, D.K., T. Kant, and R.K. Singh, *A critical review of recent research on functionally graded plates*. Composite Structures, 2013. 96: p. 833-849.

- [2] Sankar, B.V., *An elasticity solution for functionally graded beams*. Composites Science and Technology, 2001. 61: p. 689–696.
- [3] Simsek, M. and T. Kocaturk, *Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load*. Composite Structures, 2009. 90: p. 465–473.
- [4] Nguyen, D.K. and S.G. Buntara, *Large deflections of tapered functionally graded beams subjected to end forces*. Applied Mathematical Modelling, 2014. 38: p. 3054–3066.
- [5] Chakraborty, A., S. Gopalakrishnan, and J.N. Reddy, *A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials*. International Journal of Mechanical Sciences, 2003. 45(3): p. 519-539.
- [6] Mohanty, S.C., R.R. Dash, and T. Rout, *Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's elastic foundation*. Nuclear Engineering and Design, 2011. 241(8): p. 2698-2715.
- [7] Hemmatnezhad, M., R. Ansari, and G.H. Rahimi, *Large-amplitude free vibrations of functionally graded beams by means of a finite element formulation*. Applied Mathematical Modelling, 2013. 37(18-19): p. 8495-8504.
- [8] Spacone, E., F.C. Filippou, and F.F. Taucer, *Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of RC Frames: I: Formulation*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1996. 25(7): p. 711-725.
- [9] Saritas, A. and A. Koseoglu, *Distributed Inelasticity Planar Frame Element with Localized Semi-Rigid Connections for Nonlinear Analysis of Steel Structures*. International Journal of Mechanical Sciences, 2015. 96-97: p. pp.216-231.
- [10] Saritas, A. and F.C. Filippou, *Analysis of RC Walls with a Mixed Formulation Frame Finite Element*. Computers and Concrete, 2013. 12(4): p. 519-536.
- [11] Bocciarelli, M., G. Bolzon, and G. Maier, *A constitutive model of metal–ceramic functionally graded material behavior: Formulation and parameter identification*. Computational Materials Science, 2008. 43: p. 16-26.
- [12] Soydas, O., *A three dimensional mixed formulation nonlinear frame finite element based on Hu-Washizu functional*, in *Civil Engineering 2013*, METU: Ankara.
- [13] Gurol, T., *Finite element modeling of beams with functionally graded materials*, in *Civil Engineering 2014*, Middle East Technical University: Ankara.
- [14] Kim, J. and G.H. Paulino, *Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2002. 53: p. 1903-1935.
- [15] Wakashima, K., T. Hirano, and M. Niino, *Space applications of advanced structural materials*, 1990, ESA
- [16] Nakamura, T., T. Wang, and S. Sampath, *Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation*. Acta Materialia, 2000. 48(17): p. 4293-4306.