

ÜÇ BOYUTLU PLASTİSİTE-HASAR MALZEME MODELLERİNİN SAYISAL ENTEGRASYONU

Afşin SARITAŞ

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Abstract: In this paper, the numerical integration of a class of plastic-damage material models is presented. The nonlinear evolution equations of the material are solved through Newton-Raphson method with a sub-stepping strategy. The algorithmic consistent tangent matrix is formulated both in terms of the stress components in terms of the principal stress and strain components then transformed to the general reference system. In order to account for the plane stress conditions, the stress-strain relations of the 3d material model are then condensed out. This technique is extended to include the presence of applied pressure or transverse reinforcing steel for a 3d concrete material model. The proposed algorithms are tested with available experimental data.

Özet: Bu makalede plastisite-hasar malzeme modellerinin sayısal entegrasyonu anlatılmaktadır. Doğrusal olmayan malzeme davranışının gelişimi denklemleri, Newton-Raphson yöntemi ve çözüm aralıklarının daraltılması stratejisiyle çözülmüştür. Algoritmik tutarlı tanjant matrisi asal gerilme – birim uzama sisteminde çözülmüş ve genel sisteme döndürülmüştür. Düzlemsel gerilme koşullarını elde etmek için 3 boyutlu gerilme – birim uzama ilişkileri uygun koşullara sınırlandırılmıştır. Bu yöntemi geliştirerek yapılardaki enine donatının varlığı da dikkate alınabilir. Son olarak tavsiye edilen yöntemlerin davranışı test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Plastisite, hasar, algoritmik tutarlı matris, sayısal entegrasyon

1. GİRİŞ

Malzemelerin doğrusal olmayan elastik davranışının modellenmesinde elastisite teorisi, plastisite teorisi, hasar mekaniği veya kırılma mekaniği tarafından sunulan teoriler ayrı ayrı veya birleştirilerek kullanılabilir. Her bir değişik teorinin uygulama alanları modellenmek istenen malzemenin ana karakteristik davranışı ile ilgilidir. Örnek vermek gerekirse, demir gibi metal malzemelerin modellenmesinde plastisite teorisi

güzel sonuçlar verir, ancak beton gibi kırılğan bir malzemenin modellenmesinde aynı teori yetersiz kalabilmektedir. Betonun davranışı aksenel çekme ve basınçta birbirinden tamamen farklıdır, ayrıca iki aksenli veya üç aksenli yüklemelerde de durum tamamen değişir. Betonun basınç dayanımı plastisite teorisi ile modellenmektedir. Hasar mekaniği teorisi ise çatlakların oluşması sonucu yapısı zarar gören malzemelerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu teoride basit olarak bir skaler hasar parametresi D 'nin varlığı dikkate alınır ([1]). $D = 1$ malzemenin hiç hasar görmediği, $D = 0$ ise malzemenin tamamen hasar gördüğü anlamına gelir ve etkin gerilme $\bar{\sigma}$ ile gerilme σ arasında ilişki şöyle kurulur

$$\sigma = (1 - D)\bar{\sigma} \quad (1)$$

Literatürde plastisite teorisi ve hasar mekaniğinin karışımı ile değişik modeller geliştirilmiştir ([2], [3], [4]).

Bu makalede beton malzemesi için geliştirilen plastisite-hasar modellerinin davranışının entegrasyonuna yönelik bir çalışma sunulmuştur. Model davranışı asal gerilme aksenleri yönünde çözülmüş ve bunun için genel en yakın nokta projeksiyonu algoritması kullanılmıştır. Ayrıca gerektiği durumlarda her bir çözüm adımı malzeme seviyesinde parçalara bölünerek uyarlamalı ara-adım stratejisi kullanılmış ve yakınsama elde edilmiştir. Bu sayede global seviyedeki çözüm kolaylaşabilmektedir. Algoritmik tutarlı tanjant matrisi asal gerilme – birim uzama sisteminde çözülmüş ve genel sisteme döndürülmüştür.

Üç boyutlu gerilme – birim uzama ilişkilerinin entegrasyonundan sonra elde edilen sonucun giriş sonlu eleman modellerinde kullanılabilmesi için üç boyutta geliştirilen ilişkiler üstüne gerekli sınırlamaların uygulanması şarttır. En basitinden bir giriş elemanında bulunabilecek düzlem gerilme durumuna uygun gerilme – birim uzama değerleri sağlamak gerekir. Bunun için üç boyutlu bir malzeme modelinin düzlem gerilme durumuna uygun özel olarak türetilmiş halini kullanmak mümkündür (J_2 plastisite modeli için [5] ve plastisite-hasar modeli için [6]'ya bakınız). Bu tür bir yaklaşımdaki sorun, her bir farklı model için özel olarak düzlem gerilme durumunun türetilmesi gerekir. Bu yöntem yerine, düzlem gerilme şartının gerektirdiği sınırlamaların malzeme modeline direk uygulanmasını sağlayan bir algoritmanın kullanılması ve böylece herhangi bir üç boyutlu malzeme modelinin dönüşümünün kolayca sağlanması daha avantajlıdır. Bu çalışmada hem düzlem gerilme durumu hem de enine donatı yani etriyenin varlığı da dikkate alınarak bir algoritma sunulmuştur. Tüm geliştirilen algoritmalar malzeme seviyesinde test edilerek doğrulanmıştır.

2. PLASTİSİTE-HASAR MODELİ İÇİN KONTİNÜM DENKLEMLERİ

Plastisite-hasar modelinin tanımı şu denklemlerle yapılır

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{m}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}), \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (2)$$

burda $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ sırasıyla toplam, elastik ve plastik birim uzama değerleri; \mathbf{C}_0 hasarsız durumdaki malzemenin elastik rijitlik tensörü, \mathbf{m} akış vektörü, $\boldsymbol{\kappa}$ malzeme modelinde kullanılan parametreleri içeren set ve \mathbf{h} da plastisite modülüdür. Plastik çarpan $\dot{\lambda}$ aşağıda verilen yükleme-boşaltma durumundan elde edilir

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \dot{\lambda} F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (3)$$

ve $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ ise kabul edilebilir gerilmelerin hesabında kullanılacak akma fonksiyonu veya hasar sınırı fonksiyonudur.

2.1 Hasar Gelişim Denklemlerinin Entegrasyonu

(2) ve (3)'te verilen kontinum denklemlerinin sayısal çözümü parçalı bir şekilde zaman üzerinde ilerliyerek elde edilir. Bunun için geriye doğru Euler zaman entegrasyonu yöntemi kullanarak kontinum denklemlerini artımsal forma dönüştürebiliriz ve sonuç olarak genel en yakın nokta projeksiyonu algoritmasını elde ederiz.

Çözüm için öncelikle t_n zamanında malzeme noktasındaki doğrusal olmayan davranışı temsil eden $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \boldsymbol{\kappa}_n\}$ değişkenlerinin bilindiği varsayılır. Bu bilgi ile t_n zamanındaki etkin gerilme $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ ve hasar değişkeni D_n 'yi şu şekilde hesaplarız;

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \mathbf{C}_0(\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad \text{and} \quad D_n = D(\boldsymbol{\kappa}_n) \quad (4)$$

Burda hasar değerlerini temsil eden parametre seti $\boldsymbol{\kappa}$, çekme ve basınç hasar değişkenleri kullanılarak şu şekilde yazılır $\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_t; \kappa_c\}$. Çekme ve basınç altındaki hasar fonksiyonları D_t ve D_c ise tek eksenli malzeme deneylerinden elde edilen davranışla karşılaştırılarak hesaplanırlar.

Denklem (2)'deki plastik birim uzamanın geriye doğru Euler yöntemi kullanarak entegrasyonu ile t_{n+1} zamanındaki plastik birim uzama değerlerini elde ederiz. Elde edilen bu değer ve $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ifadesinin denklem (2)'deki gerilme – birim uzama ilişkisine yerleştirilmesi ile t_{n+1} zamanındaki etkin gerilmeyi elde ederiz

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{deneme} - \Delta\lambda \mathbf{C}_0 \mathbf{m} \quad \text{ve} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{deneme} = \mathbf{C}_0(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (5)$$

Bu değerlerin akma fonksiyonuna yerleştirilmesi ile elde edilen sonuç eğer sıfırdan küçük yani $F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{deneme}, \boldsymbol{\kappa}_n) \leq 0$ ise, o zaman deneme değerleri çözüm olarak kabul edilir, davranış elastiktir ve plastik çarpan $\Delta\lambda$ sıfırdır. Yani t_{n+1} zamanı için gerilme ve hasar değerlerimiz deneme değerleriyle aynıdır, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{deneme}$ ve $\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n$.

Eğer yukarda yazılı akma durumu sıfırdan küçük değilse, o zaman malzeme değerlerinin entegrasyonu yapılır

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\lambda \mathbf{h} \quad (6)$$

(5) ve (6)'daki doğrusal olmayan denklemlerin aynı anda çözümü ve bu arada akma durumu $F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = 0$ ifadesinin sağlanabilmesi için doğrusallaştırma yapmak gerekmektedir. Bunun için sıfıra denk gelmeyen artık kısımları temsilen denklemleri asal gerilme değerleri kullanarak şu şekilde yazabiliriz

$$\mathbf{R}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \Delta\lambda \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{deneme}; \quad \mathbf{R}_{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}_{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{h} - \boldsymbol{\kappa}_n; \quad \mathbf{R}_{\Delta\lambda} = F(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) \quad (7)$$

burda $\hat{\mathbf{C}}_0$ asal eksenlerdeki hasarsız elastik rijitlik matrisidir ve Lamé parametresi λ_L ve kesme modülü G kullanılarak şu şekilde yazılır

$$\hat{\mathbf{C}}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_L + 2G & \lambda_L & \lambda_L \\ \lambda_L & \lambda_L + 2G & \lambda_L \\ \lambda_L & \lambda_L & \lambda_L + 2G \end{bmatrix} \quad (8)$$

(7)'deki $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{x} = [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad \boldsymbol{\kappa}_{n+1} \quad \Delta\lambda]^T$ denkleminin çözümü için $\mathbf{x}^{(k)}$ değerinden başlayarak doğrusallaştırma yaparsak aşağıdaki artımsal güncelleme ilişkilerini elde ederiz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x} \quad \text{with} \quad \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (9)$$

burda \mathbf{J} denklem (7)'nin Jacobian matrisidir ve şöyle yazılır

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n\hat{\boldsymbol{\sigma}}} + \Delta\lambda\hat{\mathbf{C}}_0 \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}; & \Delta\lambda\hat{\mathbf{C}}_0 \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\kappa}}; & \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{m} \\ -\Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} & \mathbf{I}_{n\boldsymbol{\kappa}} - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} & -\mathbf{h} \\ \{\partial F / \partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}\}^T & \{\partial F / \partial \boldsymbol{\kappa}\}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

\mathbf{I} matrisi, boyutları asal gerilme vektörünün boyutu $n\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 3$ veya malzeme parametre sayısı $n\boldsymbol{\kappa}$ olan birim matrisdir.

Denklem (9)'daki çözüme başlamak için ilk değer olarak aşağıdaki vektörü alınır ve artık kısmın normu belli bir toleransdan küçük oluncaya kadar iterasyonlar k 'dan $k+1$ 'e devam ettirilerek çözüme ulaşılır.

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(0)} \\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(0)} \\ \Delta\lambda^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} \\ \boldsymbol{\kappa}_n \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k+1)})\| \leq TOL \quad (11)$$

Eğer belli bir iterasyon sonrasında denklem (11) verilen toleransın altına düşmüyorsa, o zaman verilen birim uzama vektörü küçültülerek denklem (9) tekrar çözülür. Sonuç olarak uyarlamalı ara-adım stratejisi dediğimiz yolu izleyeraki global çözüm üzerinde rahatlama sağlarız.

2.2 Hasar Düzeltme Adımı

Hasar gelişimi denklemlerinin entegrasyonundaki son adım oluşan hasarın gerilme hesabına katılması ile olur. Bu çalışmada dikkate alınan plastik-hasar modellerinde t_{n+1} zamanındaki hasar değeri D ve gerilme $\boldsymbol{\sigma}$, t_{n+1} zamanındaki malzeme parametreleri $\boldsymbol{\kappa}$ and etkin gerilme $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ değerlerinin fonksiyonlarıdır. Bu yüzden hasar düzeltme adımı ve 2.1 altbölümünde sunulan plastik düzeltme adımı birbirlerinden tamamen ayrıdır. Sonuç olarak aşağıdaki ilişkileri yazabiliriz

$$D_{n+1} = D(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}); \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1})\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \quad (12)$$

2.3 Algoritmik Tutarlı Tanjant Matrisi

Tutarlı tanjant matrisi denklem (1)'in t_{n+1} zamanında birim uzamaya göre türevinin alınması ile elde edilir

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \frac{dD_{n+1}}{d\boldsymbol{\kappa}_{n+1}} \frac{d\boldsymbol{\kappa}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} + (1 - D_{n+1}) \frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (13)$$

Yukardaki denklemin sağ tarafındaki türevlerin hesabında iki farklı yöntem izleyebiliriz. İlk yöntemde asal eksenlerdeki $d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}/d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$ değerini hesaplayıp sonra $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}/d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ değerini hesaplayabiliriz. İkinci yöntemdeyse $d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}/d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ değerini direk olarak üç boyutlu referans ekseninde hesaplayabiliriz. Bu makalede sadece ilk yöntem anlatılacaktır.

Denklem (7)'nin çözümü ile artık kısım yakınsamış olur ve şu ilişkiyi yazabiliriz

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \\ d\boldsymbol{\kappa}_{n+1} \\ d\Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{C}}_0 d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \\ \mathbf{0}_{n\kappa} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \\ d\boldsymbol{\kappa}_{n+1} \\ d\Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Xi}}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} & \bullet & \bullet \\ \hat{\boldsymbol{\Xi}}_{\boldsymbol{\kappa}} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{C}}_0 d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \\ \mathbf{0}_{n\kappa,1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Denklem (14)'te sağdaki ilişkide Jacobian matrisinin tersinin sadece kullanılacak olan kısımları yazılmış, geri kalan kısımlar ise koyu nokta işareti ile gösterilmiştir. Etkin gerilmenin ve malzeme parametrelerinin birim uzamaya göre türevini denklem (14)'den elde ederek, üç boyutlu malzemenin asal eksenlerdeki tutarlı tanjant matrisini yazarız

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \left[(1 - D_{n+1}) \boldsymbol{\Xi}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \frac{dD_{n+1}}{d\boldsymbol{\kappa}_{n+1}} \boldsymbol{\Xi}_{\boldsymbol{\kappa}} \right] \hat{\mathbf{C}}_0 \quad (15)$$

Asal eksenlerden üç boyuttaki referans eksene geçiş için [7]'de tavsiye edilen yöntemi kullanabiliriz

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_A}{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_B} \mathbf{m}_A^T \mathbf{m}_B + \frac{(1 - D_{n+1})}{2} \sum_{A=1}^3 \sum_{B \neq A}^3 \left[\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_B - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_A \end{pmatrix} (\mathbf{m}_{AB}^T \mathbf{m}_{AB} + \mathbf{m}_{AB}^T \mathbf{m}_{BA}) \right] \quad (16)$$

burda \mathbf{m}_A etkin gerilmenin özvektörleri \mathbf{v}_A kullanılarak şu şekilde hesaplanır

$$\mathbf{m}_A = \mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_A, \quad \mathbf{m}_{AB} = \mathbf{v}_A^T \mathbf{v}_B, \quad A \neq B \quad (17)$$

Tekrarlayan özdeğerler olduğu zaman bunlara hafif bir değişim verilir ve istenilen hesaplama yapılır. Alternatif olarak, $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A)/(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_B - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_A)$ ifadesi $\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_A)/\partial\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_B$ olarak da hesaplanabilir.

3. ÜÇ BOYUTLU MALZEMENİN KİRİŞ ELEMANI DÜZLEMİNE AKTARIMI

Kolon veya kiriş betonarme elemanlarında bulunan enine donatının varlığını dikkate alarak beton ile donatı arasında y ve z yönlerinde denge ilişkisini tam bağ olduğunu varsayarsak şöyle yazabiliriz

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} + \rho_y f_{vy} \\ \sigma_{zz} + \rho_z f_{vz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

burda ρ_y ve ρ_z enine donatının kesit alanına göre sırasıyla y ve z yönlerindeki oranlarıdır. f_{vy} ve f_{vz} ise enine donatı malzemesinin y ve z yönündeki gerilme değerleridir.

Yukardaki denklemin y ve z yönlerinde başlangıç ϵ_0 birim uzama değerlerinden doğrusallaştırılması ile bu yönlerdeki güncelleme ilişkisini elde ederiz

$$\begin{bmatrix} C_{2222} + \rho_y E_{vy} & C_{2233} \\ C_{3322} & C_{3333} + \rho_z E_{vz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{yy} \\ \Delta \epsilon_{zz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R_{y,0} \\ R_{z,0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{xx} \\ \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

burda malzeme tanjant matrisinin bileşenleri $\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \epsilon_{ij}$ için sayısal gösterim $\{1,2,3\}$ ve harfli gösterim $\{x,y,z\}$ değişimli kullanılmıştır.

3.1 Kiriş Elemanı için Malzeme Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

Üç boyutlu malzeme modelinden elde edilen denklem (16)'daki tutarlı tanjant matrisinin herhangi bir kiriş sonlu elemanında kullanılabilmesi için matrisin boyutlarında ayarlamaların yapılması gerekir. Kiriş elemanında iç aktif gerilme σ_{xx} , σ_{xy} ve σ_{xz} değerlerinin olduğunu ve geri kalan gerilmelerin sıfır olduğunu varsayarsak, sonuç olarak kiriş elemanı kesidi üzerindeki herhangi bir malzeme noktasında kullanılacak \mathbf{k}_m rijitlik matrisini elde ederiz (detaylı türetim için [8]'e bakınız)

$$\mathbf{k}_m = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{1122} & C_{1133} \\ C_{1222} & C_{1233} \\ C_{1322} & C_{1333} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} C_{2222} + \rho_y E_{vy} & C_{2233} \\ C_{3322} & C_{3333} + \rho_z E_{vz} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. PLASTİK-HASAR BETON MALZEME MODELİNDE UYGULAMA

Uygulama için [4] tarafından geliştirilen plastik-hasar beton malzeme modeli seçilmiş ve akma fonksiyonu daha önceden türetilen Barcelona modelidir ([3]).

$$F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\alpha \bar{I}_1 + \sqrt{3} \bar{J}_2 + \beta \langle \hat{\bar{\sigma}}_{\max} \rangle \right) - c \quad (21)$$

Bu denklemde etkin gerilme tensörü kullanılmıştır. $\bar{I}_1 = tr(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$, $\bar{J}_2 = \bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{s}} / 2$ olmak üzere $\bar{\mathbf{s}}$ deviatorik etkin gerilmedir. $\hat{\bar{\sigma}}_{\max}$ cebirsel en büyük asal etkin gerilme ve $\langle x \rangle = (|x| + x) / 2$ ise Macaulay parantez fonksiyonudur. Kohezyon parametresi c basınç altındaki kohezyondur ve κ malzeme parametrelerine bağlı bir fonksiyondur. α , eksenel ve iki-eksenli basınç altındaki davranışın akma dayanımı f_{c0} ve f_{b0} değerlerinden elde edilir. β , malzeme parametreleri κ 'nın fonksiyonudur ve bu ilişki çekme ve basınç kohezyon değişkenlerine bağlıdır. Burda kısaca açıklanan tüm bu değişkenlerin daha detaylı açıklamaları için [4]'e bakınız.

Denklem (6)'daki plastisite modülü \mathbf{h} ile malzeme değişkenlerinin gelişimi hesaplanır

$$\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \begin{bmatrix} r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})f_t(\boldsymbol{\kappa}_t)/g_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}))f_c(\boldsymbol{\kappa}_c)/g_c \end{bmatrix} \quad (22)$$

burda f_t ve f_c çekme basınç dayanım fonksiyonlarıdır ve sırasıyla $\boldsymbol{\kappa}_t$ ve $\boldsymbol{\kappa}_c$ malzeme parametrelerine bağlıdır. $g_t = G_t/L_t$ ve $g_c = G_c/L_c$ değerleri sırasıyla çekme ve basınç hasarı sırasında harcanan tüm enerjiyi temsil ederler; G_t ve G_c çekme ve basınca karşılık gelen kırılma enerjileridir; L_t ve L_c ise çekme ve basınç için malzemenin tipik uzunluklarıdır. Tipik uzunlukların kullanımı sayesinde sonlu elemanlar yönteminde objektif sonuçlar elde ederiz. Denklem (22)'de $r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ şu şekilde yazılır

$$r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = 0 \quad \text{eğer } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}; \quad r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\hat{\sigma}_i|} \quad \text{diğer hallerde} \quad (23)$$

Denklem (2)'deki akma vektörü \mathbf{m} , plastik potansiyel fonksiyonunun etkin gerilmelere göre türevinin alınmasıyla elde edilir. [4]'teki çalışmada Drucker-Prager fonksiyonu kullanılmışken bu çalışmada Drucker-Prager fonksiyonunun hiperbolik hali kullanılmıştır.

$$\Phi = \sqrt{(\rho f_{t0} \tan \psi)^2 + 3\bar{J}_2} + \left(\frac{\tan \psi}{3} \right) \bar{I}_1 \quad (24)$$

burda ψ genişleme açısı, f_{t0} hasarsız durumdaki aksenal çekme dayanımı, ρ ise denklem (24)'deki asimptota yaklaşım hızını belirleyen parametredir.

Hasar değişkeni D 'nin hesabı için [9]'daki ilişki seçilmiştir.

$$D = 1 - (1 - s_t D_c(\boldsymbol{\kappa}))(1 - s_c D_t(\boldsymbol{\kappa})), \quad 0 \leq s_t, s_c \leq 1 \quad (25)$$

D_t ve D_c değerleri çekme ve basınç altındaki hasarla ilgilidir ve şu şekilde hesaplanırlar

$$D_{\mathbb{N}} = 1 - \left[\left(\frac{1}{a_{\mathbb{N}}} \right) \left(1 + a_{\mathbb{N}} - \sqrt{1 + a_{\mathbb{N}}(2 + a_{\mathbb{N}})\kappa_{\mathbb{N}}} \right) \right]^{d_{\mathbb{N}}/b_{\mathbb{N}}} \quad \mathbb{N} \in \{t, c\} \quad (26)$$

burda $a_{\mathbb{N}}$, $b_{\mathbb{N}}$ ve $d_{\mathbb{N}}$ parametreleri model davranışının çekme ve basınç altındaki davranışı temsil edebilmesi için kalibre edilir. Denklem (25)'deki s_t ve s_c ise aşağıya yazılmıştır

$$s_t = 1 - w_t r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad 0 \leq w_t \leq 1; \quad s_c = 1 - w_c (1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})) \quad 0 \leq w_c \leq 1 \quad (27)$$

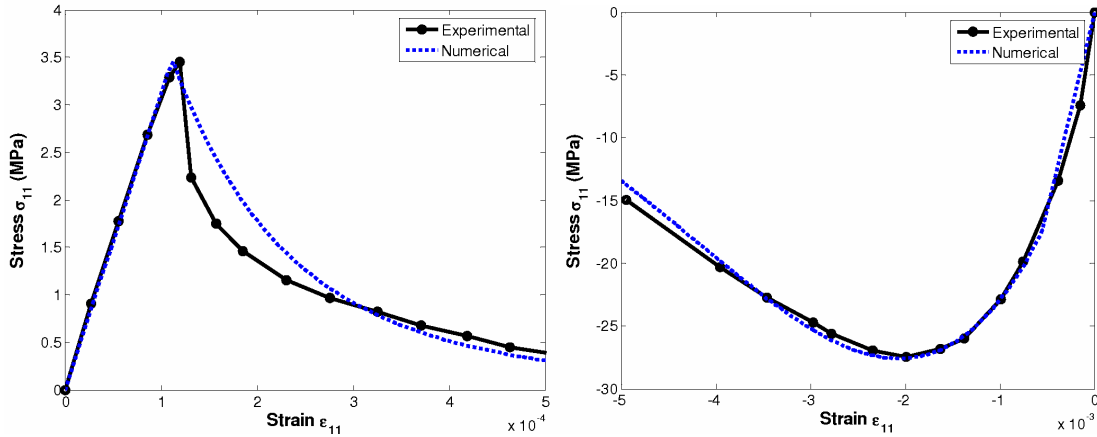
w_t ve w_c çekme ve basınç davranışları arasındaki geçişte rijitliğin tekrar kazanımını temsil eder.

4.1 Malzeme Davranışının Testlerle Karşılaştırılması

[10]'da çekme ve [11]'de basınç deneylerinin sonuçları ile kullanılan beton malzeme modelinin aksenal davranışları bu kısımda karşılaştırılmıştır. Malzeme modelinde Poisson oranı 0.18, basınç altında iki-eksenli ile tek eksenli akma dayanımı oranı $f_{b0}/f_{c0} = 1.2$ alınmıştır. Çekme deneyini karşılaştırmak için, hasarsız elastik modülü

olarak $E_0 = 3.1 \times 10^4$ MPa , en büyük çekme dayanımı $f_t' = 3.48$ MPa , çekmede kırılma enerjisi $G_t = 40$ N/m, tipik malzeme uzunluğu $L_t = 82.6$ mm olarak kullanılmıştır. Basınç deneyini karşılaştırmak içinse, $E_0 = 3.17 \times 10^4$ MPa , en büyük basınç dayanımı $f_c' = -27.6$ MPa , basınç altındaki kırılma enerjisi $G_c = 5690$ N/m, tipik malzeme uzunluğu $L_c = 82.6$ mm olarak kullanılmıştır.

Karşılaştırma için denklem (18)'deki ilişkinin donatısız hali kullanılmış ve üç boyutlu malzeme modelinin gerilme – birim uzama değerlerinden tek eksenli davranışa ulaşılmıştır. Şekil (1)'deki deney sonuçları ile olan karşılaştırmanın da gösterdiği gibi gerçekçi beton davranışı elde edilmiştir.

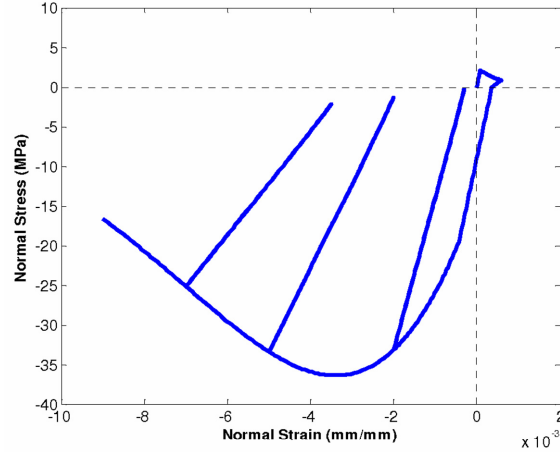


Şekil 1. Tek eksenli deneyler ve malzeme modelinin karşılaştırması (sol: çekme, sağ: basınç)

5. GELİŞTİRİLEN ALGORİTMALARIN YAKINSAMA DAVRANIŞI

Bu makalede geliştirilen algoritmaların yakınsama özelliklerini çalışmak için normal ve kesme gerilmeleri yaratacak bir yükleme koşulu oluşturulmuştur. Bu yüklemede, normal ve kesme birim uzamaları arasında periyodik olarak $\gamma_{xy} = 0.5 \epsilon_{xx}$ ilişkisinin ve malzemede düzlem gerilme durumunun olduğu varsayılmıştır. Herhangi bir deneyle karşılaştırma olmadığı için malzeme parametrelerinin belirtilmesine gerek yoktur. Yükleme sonrasında elde edilen normal gerilme – birim uzama ilişkisi Şekil (2)'de verilmiştir. Bu şekilde malzeme modelindeki rijitlik kaybı ve plastik birim uzamalarının varlığı açıkça görülmektedir.

Denklem (7)'nin çözümünde 10^{-12} tolerans kullanılınca çözüm sırasında oluşan artık kısımlar Tablo (1)'de sunulmuştur. Genel en yakın nokta projeksiyonu algoritması 3-4 iterasyonda yakınsamaktadır. Plastik-hasar beton modelinin yakınsaması çoğunlukla kareliye yakındır. Geriye doğru Euler yönteminin özelliği, düzgün davranışı olan bir fonksiyonun entegrasyonu sonucu olarak kareli yakınsama vermesidir. Bu makalede kullanılan malzeme modelinde akma ve plastik potansiyel fonksiyonlarının farklı olması ve denklem (23)'deki fonksiyonun tekil noktalarının olması yüzünden algoritmanın yakınsamasında yavaşlamalar gözlemlenmiştir. Eğer verilen adımdaki birim uzama büyükse, denklem (7)'nin çözümünde ara-adım stratejisi kullanılmıştır.



Şekil 2. Normal gerilme – birim uzama davranışı

Tablo 1. Genel en yakın nokta projeksiyonu algoritmasının yakınsaması

Örnek Çözüm Adımı	$\ R\ $
1	5.0025e-008
	2.9841e-014
2	1.9748e-006
	1.8769e-011
3	1.2999e-017
	3.3547e-005
4	4.4670e-009
	1.4175e-014
4	5.3179e-006
	2.0343e-009
	2.5500e-012
	3.0504e-015

6. SONUÇLAR

Bu makalede üç boyutlu plastik-hasar malzeme modellerinin çözümü için sayısal entegrasyon algoritmaları geliştirmiştir. Bunun için geriye doğru Euler sayısal entegrasyonu kullanılmış, çözüm için asal eksenlerdeki davranıştan bütün sisteme geçilerek gerilme – birim uzama ilişkisi ve algoritmik tutarlı tanjant matrisi elde edilmiştir. Uyarlamalı ara-adım tekniğinin kullanılması ile malzeme modelinin yakınsaması kolaylaşmıştır.

7. KAYNAKLAR

- [1]. Lemaitre, J., *Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive-Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985. **51**(1-3): p. 31-49.
- [2]. Simo, J.C. and J.W. Ju, *Strain-Based and Stress-Based Continuum Damage Models .1. Formulation*. International Journal of Solids and Structures, 1987. **23**(7): p. 821-840.
- [3]. Lubliner, J., J. Oliver, S. Oller, and E. Onate, *A Plastic-Damage Model for Concrete*. International Journal of Solids and Structures, 1989. **25**(3): p. 299-326.

- [4]. Lee, J.H. and G.L. Fenves, *Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures*. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 1998. **124**(8): p. 892-900.
- [5]. Simo, J.C. and R.L. Taylor, *Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **22**: p. 649-670.
- [6]. Lee, J. and G.L. Fenves, *A return-mapping algorithm for plastic-damage models: 3-D and plane stress formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001. **50**(2): p. 487-506.
- [7]. Miehe, C., *Comparison of Two Algorithms for the Computation of Fourth-Order Isotropic Tensor Functions*. Computers and Structures, 1998. **66**(1): p. 37-43.
- [8]. Saritas, A., *Mixed Formulation Frame Element for Shear Critical Steel and Reinforced Concrete Members, Ph.D. Dissertation*. 2006, University of California, Berkeley.
- [9]. ABAQUS, *Theory Manual Version 5.5*. 1995.
- [10]. Gopalaratnam, V.S. and S.P. Shah, *Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension*. Journal of the American Concrete Institute, 1985. **82**(3): p. 310-323.
- [11]. Karsan, I.D. and J.O. Jirsa, *Behavior of Concrete Under Compressive Loadings*. Journal of the Structural Division, ASCE, 1969. **95**(ST12): p. 2543-2563.