

# EĞRİ YAPI ELEMANLARI İÇİN KARMA FORMULASYON KİRİŞ SONLU ELEMANI

Afşin SARITAŞ

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Orta DoĐu Teknik Üniversitesi

**Abstract:** A curved beam element based on a three-field variational formulation with independent displacement, stress, and strain fields is developed. The displacement field is adapted from Timoshenko beam theory for curved geometry. The nonlinear response of the element arises from the integration of stress-strain relations over several control sections along the element length. The finite element approximation for the beam uses shape functions for stress resultants that satisfy equilibrium and discontinuous strains along the beam. No approximation for the beam displacement field is necessary in the formulation. The proposed element is free from membrane and shear locking. Examples verify the superior performance of the model under linear and nonlinear material conditions.

**Özet:** Bu çalışmada eğri yapı elemanların modellenmesinde kullanılacak kiriş sonlu elemanı anlatılmıştır. Kiriş elemanı türetiminde deplasman, gerilme ve birim uzama bağımsız alanlı değişimsel formülasyon kullanılmıştır. Deplasman alanında eğri geometrilere uygulanmış Timoshenko kiriş teorisi temel alınmıştır. Doğrusal olmayan davranış, eleman boyunca bulunan kontrol kesitleri üzerindeki gerilme - birim uzama ilişkilerinin entegrasyonu sonucu elde edilmektedir. Kiriş modelinin sonlu eleman yaklaşımında, gerilme bileşkeleri (kesit kuvvetleri) için dengeyi sağlayan şekil fonksiyonları ve kiriş boyunca süreksiz birim uzamalar (kesit deformasyonları) kullanılmıştır. Formülasyonda, kirişteki deplasman alanı için herhangi bir yaklaşım yapma gereği yoktur, sadece eleman uçlarındaki deplasman değerleri gereklidir. Önerilen eleman, diyafram ve kesme kilitlemesinden tamamen kurtulmuştur. Makalede sunulan örnekler, geliştirilen elemanın doğrusal ve doğrusal olmayan malzeme davranışlarını modellemedeki üstün başarısını sergilemektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Eğri kiriş, karma formülasyon, sonlu elemanlar, diyafram kilitlemesi, kesme kilitlemesi

## 1. GİRİŞ

EĞri geometrili kiriş sonlu elemanlarının geliştirilmesi ile ilgili olarak en önemli sorun kilitleme olgusu ve kiriş elemanının doğrusal ve doğrusal olmayan malzeme davranışlarını yakalayabilmedeki hatasızlığıdır. Deplasman temelli düz kiriş sonlu eleman modellerinde

sadece kesme kilitlenmesi yaşanırken, eğri kiriş modellerinde geometrinin de etkisiyle hem diyafram hem de kesme kilitlenmeleri yaşanmaktadır.

Kilitlenme olgusunu aşmak için literatürde pek çok yöntem ve model geliştirilmiştir. Bunların çoğu kilitlenme sorununu çözebilmesine rağmen, bir kiriş parçasının doğrusal elastik koşullar altında bile pek çok sonlu eleman olarak modellenmesini gerektirmiştir ([1], [2], [3] ve [4]). Bu arada denge diferansiyel denklemleri kullanılarak geliştirilen kiriş modellerinin kilitlenme sorunu yaşamadığı gözlemlenmiştir. Bu yaklaşım kullanılarak eğri geometriler için 2-düğümlü kiriş modeli geliştirilmiştir ([5]); ancak bu modelin formülasyonu sadece doğrusal elastik durumlar için yapılmıştır.

Kilitlenme olgusuna çözüm bulma arayışları melez/karma formülasyon ile de olmuştur. [6]'daki çalışmada eğilme enerjisini daha iyi temsil edebilmek için kesit eğrilik deformasyonu bağımsız alan olarak modellenmiştir. [7]'de ise Hellinger-Reissner değişimsel prensibi ile denge diferansiyel denklemlerinden elde edilen kuvvet interpolasyon fonksiyonları ve deplasman alanı içinse Lagrange şekil fonksiyonları kullanılarak eğri kiriş modeli geliştirilmiştir. Tüm bu modeller her ne kadar doğrusal elastik davranış altında kilitlenme sorunu yaşamasa da, bir kiriş parçasının birden fazla sonlu elemanla modellenmesine ihtiyaç duymuştur. Ayrıca bu modellerde doğrusal olmayan malzeme tepkisine de değinilmemiştir.

Bu makalede geliştirilen model, daha önce düz geometri için tavsiye edilmiş çalışmanın ([8]) eğri geometrilere uygulanmış halidir. Modelin formülasyonu, üç-alanlı değişimsel Hu-Washizu prensibine dayanmaktadır. Sonuç olarak hiç bir şekilde kilitlenme sorunu yaşamamaktadır ve sadece tek eleman kullanımı ile bir kiriş parçasının doğrusal elastik davranışını hatasız modelleyebilmektedir. Ayrıca doğrusal olmayan tepkiyi de bir eleman kullanarak hatasız yakın elde edebilmektedir.

## 2. SONLU ELEMAN FORMULASYONU

### 2.1. *Hu-Washizu Fonksiyoneli*

Elemanın matematiksel formülasyonunda üç bağımsız alanlı Hu-Washizu fonksiyoneli temel alınmıştır, yazmak gerekirse

$$\Pi_{HW}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T [\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega + \Pi_{ext} \quad (1)$$

burda  $\boldsymbol{\sigma}$  gerilme,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  birim uzama ve  $\mathbf{u}$  da deplasman bağımsız alanlarıdır. Ayrıca  $W(\boldsymbol{\varepsilon})$  şekil değiştirme enerji fonksiyonundan gerilmeler şöyle elde edilebilir  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \partial W(\boldsymbol{\varepsilon}) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ . Denklem (1)'de birim uzama vektörü  $\boldsymbol{\varepsilon}^u$  deplasman alanı  $\mathbf{u}$  ile uyumludur.  $\Pi_{ext}$  ise kitle kuvvetleri  $\mathbf{b}$  ve sınır şartlarından oluşan dış yüklerin ortaya çıkardığı potansiyel enerjidir ve şu şekilde yazılır

$$\Pi_{ext} = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \mathbf{t}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T [\mathbf{u} - \mathbf{u}^*] d\Gamma \quad (2)$$

Bu denklemde çekme gücüyle yaratılan gerginlik  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  vektörü gerilme tensörü ile elemanın dış yüzey sınırına dik yön vektörü  $\mathbf{n}$ 'in skaler çarpımı ile elde edilir. Ayrıca \* işareti empoze edilmiş değerleri belirtir. Dış yük konzervatiftir, yani yapılan iş deplasman alanı  $\mathbf{u}$ 'nun sadece son değerine bağlıdır. Denklem (1) ve (2)'de kitle hacmi  $\Omega$ ,  $\Gamma_t$  ve  $\Gamma_u$  ise kuvvet ve deplasman sınır şartlarını gösterir.

## 2.2. Eğri Kiriş Elemanı için Kinematik Yaklaşım

Kiriş elemanın Şekil (1)'de gösterilen kinematığı Timoşenko kiriş teorisinin eğri geometrilere uygulanması ile şöyle yazılır

$$\mathbf{u}(\varphi, r) = \begin{Bmatrix} u_\varphi(\varphi, r) \\ u_r(\varphi, r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(\varphi) - y\theta(\varphi) \\ w(\varphi) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

burda  $r = R + y$  ve  $x = R\varphi$  'dir. Kutup koordinatları kullanarak, deplasman alanından birim uzama değerlerini radial ve çevresel yönlerde şöyle hesaplarız

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^u &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{1+y/R} \left( \frac{w(\varphi)}{R} + \frac{1}{R} \frac{du(\varphi)}{d\varphi} - \frac{y}{R} \frac{d\theta(\varphi)}{d\varphi} \right) \\ \gamma_{r\varphi}^u &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = \frac{1}{1+y/R} \left( \frac{1}{R} \frac{dw(\varphi)}{d\varphi} - \theta(\varphi) - \frac{u(\varphi)}{R} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Denklem (1)'deki birim uzama değerleri bağımsız alandır ve denklem (4) de kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{1+y/R} (\varepsilon_a(\varphi) - y\kappa(\varphi)); \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{1+y/R} \gamma(\varphi) \quad (5)$$

burda  $\varepsilon_a$  eksenel,  $\kappa$  eğrilik ve  $\gamma$  kesme kesit deformasyonlarıdır.

## 2.3. Hu-Washizu Fonksiyonelinin Değişimi

Denklem (1)'deki Hu-Washizu fonksiyonelinin değişimseli şöyle yazılır

$$\delta\Pi_{HW} = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma}^T [\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T [\delta\boldsymbol{\varepsilon}^u - \delta\boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega + \delta\Pi_{\text{ext}} \quad (6)$$

burda kiriş elemanı üzerinde  $b$  genişliğinde ve  $y$  pozisyonundaki infinitesimal bölgenin hacmi  $d\Omega = br d\varphi dr = (R+y)b dy d\varphi$

Denklem (7)'yi kullanarak, denklem (4) ve (5)'i denklem (6)'ya yerleştirirsek

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW} &= \int_{\Omega} \left\{ \left[ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\varphi (\delta\varepsilon_a(\varphi) - y\delta\kappa(\varphi)) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{r\varphi} \delta\gamma(\varphi) \right] \right\} b dy R d\varphi \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \delta\boldsymbol{\sigma}_\varphi \left[ \left( \frac{w(\varphi)}{R} + \frac{1}{R} \frac{du(\varphi)}{d\varphi} - \varepsilon_a(\varphi) \right) - y \left( \frac{1}{R} \frac{d\theta(\varphi)}{d\varphi} - \kappa(\varphi) \right) \right] \right\} b dy R d\varphi \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \delta\boldsymbol{\sigma}_{r\varphi} \left[ \frac{1}{R} \frac{dw(\varphi)}{d\varphi} - \theta(\varphi) - \frac{u(\varphi)}{R} - \gamma(\varphi) \right] \right\} b dy R d\varphi \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_\varphi \left[ \left( \frac{\delta w(\varphi)}{R} + \frac{1}{R} \frac{d\delta u(\varphi)}{d\varphi} - \delta\varepsilon_a(\varphi) \right) - y \left( \frac{1}{R} \frac{d\delta\theta(\varphi)}{d\varphi} - \delta\kappa(\varphi) \right) \right] \right\} b dy R d\varphi \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_{r\varphi} \left( \frac{1}{R} \frac{d\delta w(\varphi)}{d\varphi} - \delta\theta(\varphi) - \frac{\delta u(\varphi)}{R} - \delta\gamma(\varphi) \right) \right\} b dy R d\varphi + \delta\Pi_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (8)$$

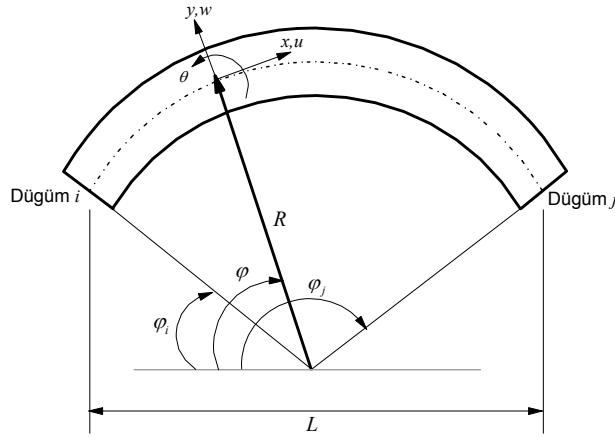
Kiriş elemanının kesit gerilme bileşikleri (yani kesit kuvvetleri) şu şekilde tanımlanır

$$N = \int_A \sigma_\varphi dA, \quad M = \int_A -y\sigma_\varphi dA, \quad V = \int_A \sigma_{r\varphi} dA \quad (9)$$

burda  $N$  aksenal kuvvet,  $M$  eğilme momenti,  $V$  ise kesme kuvveti ve  $A$  kesit alanıdır. Denklem (9)'un (8)'e yerleştirilmesi halinde

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW} = & \int_\varphi \left\{ \delta\varepsilon_a(\varphi)(\hat{N} - N) + \delta\kappa(\varphi)(\hat{M} - M) + \delta\gamma(\varphi)(\hat{V} - V) \right\} R d\varphi \\ & + \int_\varphi \left\{ \delta N \left( \frac{w(\varphi)}{R} + \frac{1}{R} \frac{du(\varphi)}{d\varphi} - \varepsilon_a(\varphi) \right) + \delta M \left( \frac{1}{R} \frac{d\theta(\varphi)}{d\varphi} - \kappa(\varphi) \right) \right\} R d\varphi \\ & + \int_\varphi \left\{ \delta V \left( \frac{1}{R} \frac{dw(\varphi)}{d\varphi} - \theta(\varphi) - \frac{u(\varphi)}{R} - \gamma(\varphi) \right) \right\} R d\varphi \\ & + \int_\varphi \left\{ N \left( \frac{\delta w(\varphi)}{R} + \frac{1}{R} \frac{d\delta u(\varphi)}{d\varphi} \right) + M \left( \frac{1}{R} \frac{d\delta\theta(\varphi)}{d\varphi} \right) \right\} R d\varphi \\ & + \int_\varphi \left\{ V \left( \frac{1}{R} \frac{d\delta w(\varphi)}{d\varphi} - \delta\theta(\varphi) - \frac{\delta u(\varphi)}{R} \right) \right\} R d\varphi + \delta\Pi_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (10)$$

$\hat{N}$ ,  $\hat{M}$  ve  $\hat{V}$  malzeme modelinin kullanılması sonucu elde edilecek kesit kuvvetleridir ve şu şekilde elde ederiz:  $\hat{N} = \int_A \hat{\sigma}_\varphi dA$ ,  $\hat{M} = \int_A -y\hat{\sigma}_\varphi dA$  ve  $\hat{V} = \int_A \hat{\sigma}_{r\varphi} dA$ . Bu entegrasyonu yerine, kesit kuvvetleri ile deformasyon değerleri arasında kesit modeli de kullanmak mümkündür.



Şekil 1. Eğri kiriş elemanın tasviri

Denklem (2)'de yazılmış olan potansiyel enerji değerini bu noktada yazabiliriz

$$\delta\Pi_{\text{ext}} = - \int_\varphi \left\{ \bar{n}(\varphi)\delta u(\varphi) + \bar{q}(\varphi)\delta w(\varphi) + \bar{m}(\varphi)\delta\theta(\varphi) \right\} R d\varphi - \delta\Pi_{\text{bc}} \quad (11)$$

burda  $\bar{n}(\varphi)$  aksenal,  $\bar{q}(\varphi)$  dikey ve  $\bar{m}(\varphi)$  de eğilme kuvvetleridir ve bunlar kiriş ekseninde birim uzunluğa uygulanırlar. Denklem (11)'de  $\delta\Pi_{\text{bc}}$  ise düğüm noktalarına uygulanacak dış yüklerden oluşan enerjiyi gösterir.

#### 2.4. Sonlu Eleman Yaklaşımları

Üç alanlı karma formulasyondan sonlu eleman yaklaşımına geçerken tutarlılık ve stabilite koşullarının sağlanması gerekir. Bunun için [8]'de belirtilen karma yama (patch) testi sayım koşulları sağlanmalıdır. 2 düğümlü düzlem kiriş elemanı için serbestlik dereceleri şunlardır

$$\hat{\mathbf{u}} = (u_i \quad w_i \quad \theta_i \quad u_j \quad w_j \quad \theta_j)^T \quad (12)$$

Bu altı serbestlik derecesinin üçü rijit kütle hareketi üçü de deformasyon modlarıdır. Kesit deformasyonları ve kuvvetlerinin sayısı arasında şu eşitsizliğe uyulmak zorundadır

$$n_{\varepsilon_a} \geq n_N \geq 1; \quad n_\kappa \geq n_M \geq 2; \quad n_\gamma \geq n_V \geq 1 \quad (13)$$

burda  $n_N, n_M, n_V$  kesit kuvvetleri için bilinmeyen eleman parametrelerinin sayısı,  $n_{\varepsilon_a}, n_\kappa, n_\gamma$  ise kesit deformasyonları için bilinmeyen eleman parametrelerinin sayısıdır. Genelde sonlu elemanlar yönteminde sürekli polinom fonksiyonların kullanımı yaygındır; ancak bu makalede kesit deformasyonları için [8]'de tavsiye edildiği gibi süreksiz veya kesikli yaklaşım kullanılacaktır.

#### 2.5. Kuvvet İnterpolasyonu için Şekil Fonksiyonları

Denklem (10)'da deplasman değerlerini içeren tüm terimlerin kısmi parçalı entegrasyonu sonucu şöyledir

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} N \left( \frac{\delta w(\varphi)}{R} + \frac{1}{R} \frac{d\delta u(\varphi)}{d\varphi} \right) R d\varphi &= [N \delta u(\varphi)]_{\varphi_i}^{\varphi_j} + \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \left( N \delta w(\varphi) - \frac{dN}{d\varphi} \delta u(\varphi) \right) d\varphi \\ \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} M \left( \frac{1}{R} \frac{d\delta \theta(\varphi)}{d\varphi} \right) R d\varphi &= [M \delta \theta(\varphi)]_{\varphi_i}^{\varphi_j} - \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \frac{dM}{d\varphi} \delta \theta(\varphi) d\varphi \\ \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} V \left( \frac{1}{R} \frac{d\delta w(\varphi)}{d\varphi} - \delta \theta(\varphi) - \frac{\delta u(\varphi)}{R} \right) R d\varphi &= [V \delta w(\varphi)]_{\varphi_i}^{\varphi_j} - \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \left\{ V (R \delta \theta(\varphi) + \delta u(\varphi)) + \frac{dV}{d\varphi} \delta w(\varphi) \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Denklem (11)'deki eleman yüklerini de dikkate alır ve kesit kuvvetleri için aşağıdaki yaklaşımı yaparsak denklem (14)'de sağ taraftaki bütün entegrasyonlu terimler yok olur.

$$\frac{dN}{d\varphi} + V = -\bar{n}(\varphi)R; \quad N - \frac{dV}{d\varphi} = \bar{q}(\varphi)R; \quad \frac{dM}{d\varphi} + RV = -\bar{m}(\varphi)R \quad (15)$$

Bu denklemler eğri kiriş elemanı için diferansiyel denge denklemleridir. Kesit kuvvetlerinin değişimsel değerleri için aşağıdaki denklem ise (10)'daki deplasmanların değişimsel değerlerini içeren tüm terimler kullanılarak benzer yolla elde edilir.

$$\frac{d\delta N}{d\varphi} + \delta V = 0; \quad \delta N - \frac{d\delta V}{d\varphi} = 0; \quad \frac{d\delta M}{d\varphi} + R\delta V = 0 \quad (16)$$

Denklem (15) ve (16)'nın kullanılması sonucu, kiriş modelinde eleman boyunca herhangi bir deplasman alanında yaklaşım yapmaya gerek kalmaz; ancak tabii ki düğüm noktalarındaki deplasman değerleri formulasyonda kullanılacaktır.

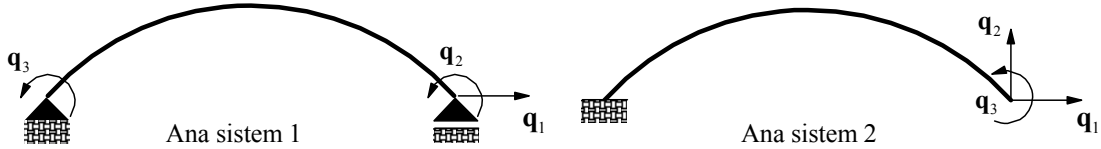
## 2.6. Denge Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Denklem (15)'teki diferansiyel dengenin çözümünde Şekil (2)'de gösterilen değişik sınır şartları kullanılabilir ve sonuç olarak kesit kuvvetlerinin eleman boyunca yaklaşımı elde edilir

$$\mathbf{s}(\varphi) = \mathbf{b}(\varphi)\mathbf{q} + \mathbf{s}_p(\varphi); \quad \mathbf{s}(\varphi) = \begin{pmatrix} N(\varphi) \\ M(\varphi) \\ V(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

burda  $\mathbf{b}(\varphi)$  kuvvet enterpolasyon fonksiyonlarını içerir ve  $\mathbf{s}_p(\varphi)$  de Şekil (2)'de gösterilen ana sistemlerde eleman eksenini boyunca uygulanacak birim yüklerin (denklem (15)'in) çözümü sonucu elde edilir. Denklem (17)'nin değişimseli  $\delta\mathbf{s}(x) = \mathbf{b}(x)\delta\mathbf{q}$  'tir. Şekil (2)'deki birinci ana sistemi kullanırsak,  $\mathbf{b}(\varphi)$  matrisini şöyle yazabiliriz

$$\mathbf{b}(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi / L & -\cos \varphi / L \\ R(\sin \varphi - \sin \varphi_i) & -1 - (\cos \varphi - \cos \varphi_i)R/L & -(\cos \varphi - \cos \varphi_i)R/L \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi / L & -\sin \varphi / L \end{bmatrix} \quad (18)$$



Şekil 2. Eğri kiriş elemanı için ana sistemler

Denklem (14)'teki ve bu denklemin değişimselinin sınır değerlerini denklem (17) ve (18)'i kullanarak matris halinde yazabiliriz

$$\{\delta N u(\varphi) + \delta u(\varphi)N + \delta M \theta(\varphi) + \delta \theta(\varphi)M + \delta V w(\varphi) + \delta w(\varphi)V\}_{\varphi_i}^{\varphi_j} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{a} \mathbf{u} + \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{a}^T \mathbf{q} - \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{p}_w \quad (19)$$

burda  $\mathbf{p}_w$  eleman eksenini boyunca uygulanan  $\bar{n}, \bar{q}$  ve  $\bar{m}$  birim kuvvetlerinin yarattığı eşdeğer düğüm kuvvetleridir. Şekil (1)'deki düğüm açıları arasındaki ilişkiyi  $180^\circ$  ile sınırlarsak,  $\varphi_j = \pi - \varphi_i$  ilişkisi ile denklem (19)'daki  $\mathbf{a}$  matrisini yazabiliriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ \cos \varphi_i / L & \sin \varphi_i / L & 1 & \cos \varphi_i / L & -\sin \varphi_i / L & -1 + 2 \cos \varphi_i R / L \\ \cos \varphi_i / L & \sin \varphi_i / L & 0 & \cos \varphi_i / L & -\sin \varphi_i / L & 2 \cos \varphi_i R / L \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 2.7. Kesit Modeli

Kesit modeli kesit üzerindeki entegrasyon noktalarının tepkileri sonucu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \hat{N} & \hat{M} & \hat{V} \end{bmatrix}^T = \int_A \mathbf{a}_s^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA; \quad \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} 1 & -y & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{S_{cc}} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\varphi \\ \hat{\sigma}_{r\varphi} \end{pmatrix} \quad (21)$$

burda  $S_{cc}$  kesme düzeltme katsayısıdır. Bu denklem kullanılarak kesit rijitlik matrisi ise şöyle hesaplanır

$$\mathbf{k}_s = \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \mathbf{e}} = \int_A \mathbf{a}_s^T \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \mathbf{e}} dA = \int_A \frac{1}{1+y/R} \mathbf{a}_s^T \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{a}_s dA \quad (22)$$

### 2.8. Eleman Formulasyonunun Matris Formu

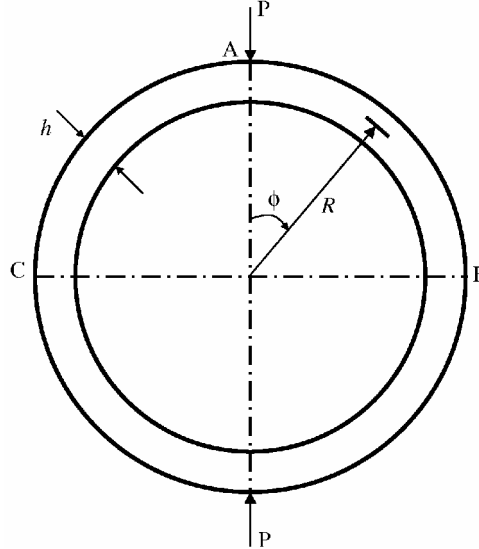
Kuvvet enterpolasyon fonksiyonlarının denklem (17)'den ve bunun değişimselinin, denklem (10)'daki Hu-Washizu fonksiyoneline yerleştirilmesi ile aşağıdaki matris formunu elde ederiz

$$\delta \Pi_{\text{HW}} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}} \\ \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{e}_l \end{Bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{0} & -\mathbf{b}(\varphi_l)^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{b}(\varphi_l) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{e}_l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_w \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_{p,l} - \hat{\mathbf{s}}_l \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (23)$$

burda  $l$  göstermesi eleman kesidi üzerindeki entegrasyon hesabında kullanılan noktaları gösterir, örneğin  $\hat{\mathbf{s}}_l = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_l)$ . Doğrusal olmayan davranış altında denklem (23)'ün doğrusallaştırılması gerekir ve sonuç olarak aşağıdaki ilişkiyi elde ederiz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{0} & -\mathbf{b}(\varphi_l)^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{b}(\varphi_l) & \mathbf{k}_{s,l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{e}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_w - \mathbf{a}^T \mathbf{q} \\ -\mathbf{a} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{b}(\varphi_l)^T \mathbf{e}_l \\ \mathbf{b}(\varphi_l) \mathbf{q} + \mathbf{s}_{p,l} - \hat{\mathbf{s}}_l \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Eleman boyunca seğilen entegrasyon noktalarındaki kesit deformasyonları  $\mathbf{e}_l$  ve eleman ana kuvvetleri  $\mathbf{q}$  denklem (24)'ten çıkarılarak, elemanın tepkisi deplasman temelli sonlu eleman programlarında çalışabilecek duruma getirilir (detaylı bilgi için [8]'e bakınız).



Şekil 3. Sıkıştırılmış ring

## 3. SAYISAL ÖRNEKLER

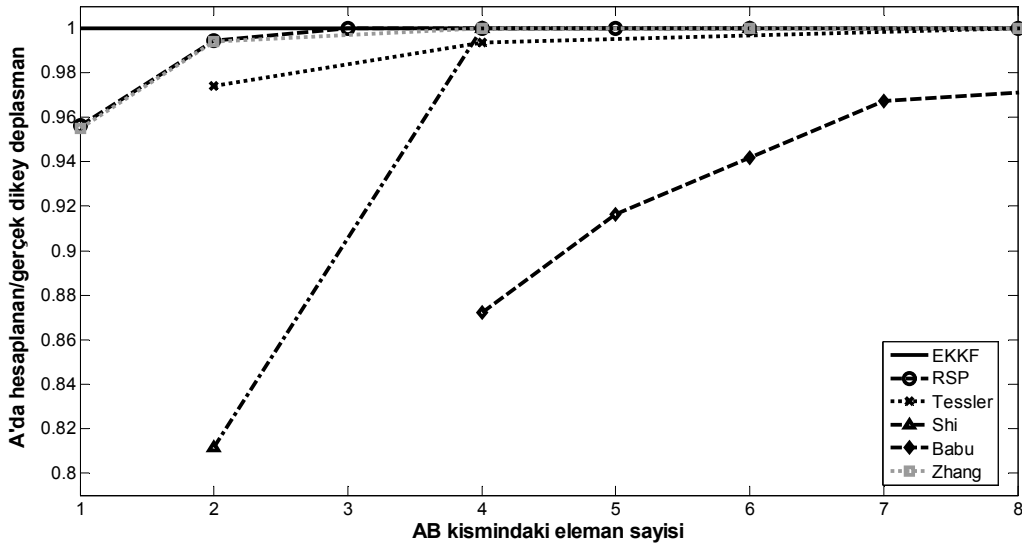
### 3.1. Sıkıştırılmış Ring

Yarıçapı  $R$  olan bir ring Şekil (3)'te gösterildiği gibi  $P$  kuvvetleri altında sıkıştırılmaktadır. Ringin yarısı simetriyi kullanarak modellenmiştir.  $A$  noktasındaki dikey deplasman değerini Castigliano'nun enerji teoremini kullanarak elde ederiz

$$w_{exact} = -\left(\frac{PR^3}{8\pi EI}(\pi^2 - 8) + \frac{\pi PR}{8GAS_{cc}} + \frac{\pi PR}{8EA}\right) \quad (25)$$

Karşılaştırma yapabilmek için geometrik ve malzeme özellikleri olarak şu değerler alınmıştır: yarıçap  $R = 4.953$ , birim kiriş genişliği, kiriş kalınlığı  $h = 0.094$ , uzatma elastikliğinin katsayısı  $E = 10.5 \times 10^6$ , elastik kesme katsayısı  $G = 4 \times 10^6$  ve noktasal yük  $P = 100$ .

Geliştirilen eğri kiriş eleman modelinin doğruluğu diğer modellerle ve denklem (25)'teki değerle karşılaştırılmıştır. Bunun için karşılaştırmalarda, [1] Babu, [2] Tessler, [3] Shi, [4] RSP ve [9] da Zhang modelleri olarak kısaca adlandırılmıştır. Bu modellerin özellikleri hakkında Giriş kısmında bilgi verilmiştir. Yapılan çözümler sonucunda, AB kısmında sadece bir eleman kullanarak, geliştirilen eğri kiriş karma formülasyon elemanı (EKKF) denklem (25)'teki değeri hatasız vermiş ve bu arada diğer modellerin başarısız olduğu Şekil (4)'te gösterildiği gibi olmuştur. Doğrusal elastik koşullar altında olunmasına rağmen, diğer modellerle en az 3 veya daha fazla eleman kullanarak ancak hatasız olarak kabul edilebilecek bir sonuç elde edilebilmektedir.



Şekil 4. Karma formülasyon elemanın sıkıştırılmış ring örneğindeki davranışı

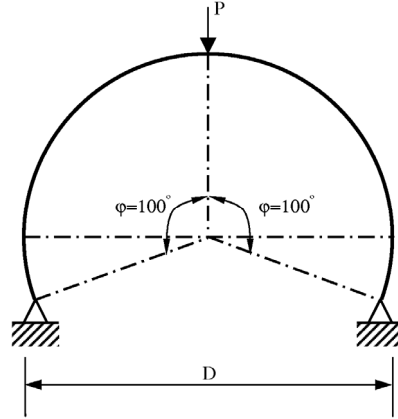
### 3.2. 200° Dairesel Betonarme Kemer Yapı

Şekil (5)'te gösterilen 200° yaylı dairesel betonarme kemer doğrusal olmayan malzeme davranışı koşulları altında dikkate alınmış ve çözümlenmiştir. Kemer yapının çapı  $D = 5$ , kalınlığı  $h = 0.25$  ve kemer yapı bir birim genişliğe sahiptir. Kiriş üst ve alt çelik donatı oranları ardarda kesidin %0.008 ve %0.011'dir.

Kiriş kesit kuvvetleri ve rijitlik matrisinin hesabı için, kesit üzerinde 10 adet nokta seçilmiş ve bunların pozisyonu orta-nokta entegrasyonu kuralından elde edilmiştir. Beton malzeme modeli olarak [10] tarafından geliştirilen gerilme - birim uzama ilişkisi kullanılmış ve bu modelde basınç dayanımı  $30 \times 10^6$ , en büyük basınç altındaki birim uzama değeri 0.002 ve en büyük birim uzama 0.008 olarak alınmıştır. Kesme yönündeki gerilme - birim uzama ilişkisinin ise dik yöndeki davranıştan ayrı olduğu ve doğrusal elastik olarak kaldığı varsayılmıştır. Elastik kesme katsayısı Poisson oranı 0.2 kullanılarak hesaplanmıştır. Çelik donatılar için çift doğrusal malzeme modeli kullanılmış ve özellikler şöyle seçilmiştir: uzatma

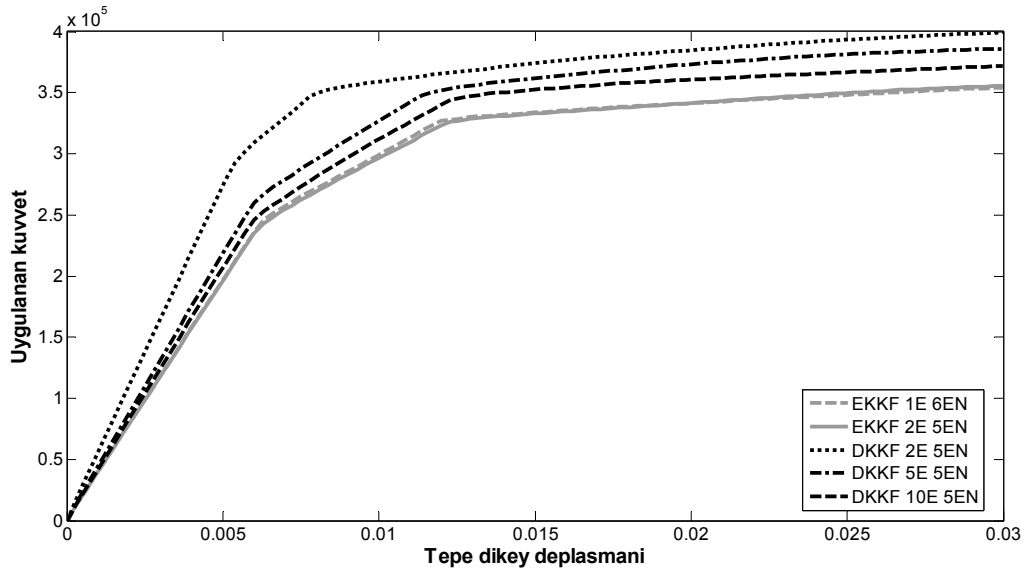


elastikliğinin katsayısı  $E=200 \times 10^9$ , akma dayanımı  $f_y = 220 \times 10^6$ , birim uzama pekleşme oranı  $\%0.5E$ . Kullanılan değerlerin birimi metrik sisteme uygundur.



Şekil 5. Dairesel betonarme kemer yapı

Simetri durumunu da kullanarak kemer yapının yarısının çözümü yapılmıştır. Karşılaştırma için 1 EKKF elemanı üzerinde 6 Gauss entegrasyon noktası (EN), 2 EKKF elemanı üzerinde 5 Gauss EN kullanılmıştır. Problem ayrıca düz kiriş elemanları kullanılarak da çözümlenmiştir. Bunun için [8]'de geliştirilen düz kiriş karma formulasyon elemanı (DKKF) denenmiştir. Bu model düz geometriler için hem doğrusal hem de doğrusal olmayan davranışları hatasızca yakın tek eleman kullanarak hesaplayabilmektedir. Karşılaştırmada 2, 5 ve 10 adet sonlu DKKF elemanı ve her elemanda 5 Gauss EN kullanılmıştır.



Şekil 6. Dairesel betonarme kemer yapı için kuvvet-deplasman grafiği

Şekil (6)'da görüldüğü gibi, eğri kiriş eleman modeli açısından bir ve iki eleman kullanımı arasındaki fark çok küçüktür. Sonuç olarak geliştirilen eğri kiriş modelinden tek eleman kullanarak hem elastik hem de doğrusal olmayan elastik davranış hatasızca yakın hesaplanabilmektedir. Bu arada düz kiriş elemanı ile kemer yapının davranışını yakalayabilmek için 10 sonlu eleman kullanımı bile yetersiz kalmaktadır.

#### 4. SONUÇLAR

Bu makalede üç alanlı değişimsel formulasyonlu eğri kiriş elemanı modeli geliştirilmiştir. Bu modelin en önemli özelliği hem diyafram hem de kesme kilitlenmesi sorunu yaşamaması ve elastik davranışı sadece bir eleman kullanarak hatasız olarak hesaplayabilmesidir. Bunun yanında elemanın doğrusal olmayan davranışı modelleme kabiliyeti de hatasızdır ve bunu tek eleman kullanımı ile başarır. Sonuç olarak eğri bir geometrinin modellenmesinde düğüm noktalarında ve serbestlik derecesinde yapılması gereken ciddi artışlara gerek kalmaz. Bu durum tabii ki büyük yapısal sistemlerin çözümünde hesapsal ve modelleme avantajları sağlar.

#### 5. KAYNAKLAR

- [1]. Babu, C.R. and G. Prathap, *A Linear Thick Curved Beam Element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **23**(7): p. 1313-1328.
- [2]. Tessler, A. and L. Spiridigliozzi, *Curved Beam Elements with Penalty Relaxation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **23**(12): p. 2245-2262.
- [3]. Shi, G. and G.Z. Voyiadjis, *Simple and efficient shear flexible two-node arch/beam and four-node cylindrical shell/plate finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991. **31**(4): p. 759-776.
- [4]. Raveendranath, P., G. Singh, and B. Pradhan, *A two-noded locking-free shear flexible curved beam element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999. **44**(2): p. 265-280.
- [5]. Friedman, Z. and J.B. Kosmatka, *An Accurate Two-Node Finite Element for Shear Deformable Curved Beams*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998. **41**(3): p. 473-498.
- [6]. Lee, P.G. and H.C. Sin, *Locking-Free Curved Beam Element Based on Curvature*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. **37**(6): p. 989-1007.
- [7]. Benedetti, A. and A. Tralli, *A new hybrid F.E. model for arbitrarily curved beam - I. Linear Analysis*. Computers and Structures, 1989. **33**(6): p. 1437-1449.
- [8]. Taylor, R.L., F.C. Filippou, A. Saritas, and F. Auricchio, *Mixed finite element method for beam and frame problems*. Computational Mechanics, 2003. **31**(1-2): p. 192-203.
- [9]. Zhang, C. and S. Di, *New accurate two-noded shear-flexible curved beam elements*. Computational Mechanics, 2003. **30**(2): p. 81-87.
- [10]. Kent, D.C. and R. Park, *Flexural Members With Confined Concrete*. Journal of the Structural Division, ASCE, 1971. **97**(ST7): p. 1969-1990.