Türevlenebilir Manifoldlara Giriş

Yıldıray Ozan

Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Matematik Bölümü

2 Şubat 2017

Sevgili anne ve babamın hatırasına

"Duyduğumu unuturum. Gördüğümü hatırlarım.
Yaptığımı anlarım."

-Konfüçyüs

Önsöz

Eğriler ve yüzeyler tarih boyunca insanların zihnini meşgul etmiştir. Benzerleri Neolitik çağlarda dahi bilinen Platonik cisimlerin sınıflandırılması Antik Yunan uygarlığında yapılmıştı. Eğri ve yüzeylerin modern anlamda tanımlanıp temel özelliklerinin ortaya konması ise Gauss ve Riemann gibi devleri bekledi. Riemann Gauss'un yüzey ve eğriler üzerine yaptığı çalışmaları mükemmelleştirip yüksek boyutlara taşıyarak bugün artık diferansiyel geometri ve Riemann geometrisi olarak bilinen alanların temellerini attı. Poincaré topolojik uzayların teorisine temel grup ve homoloji gibi cebirsel nesneleri katarak geometri ve topoloji çalışmalarındaki matematiksel kesinlik düzeyini artırdı. Homoloji teorisi yüzeyler için bilinen Euler formülünün çok daha genel bir özellik olduğunu ortaya koydu. Yüzeylerin cebirsel topolojik ve diferansiyel geometrik özellikleri arasındaki ilişki, matematik tarihinin en güzel teoremlerinden biri olan Gauss-Bonnet Teoremi'yle taçlandırıldı. Günümüz modern geometri ve topolojisinin Riemann-Roch ve Endeks Teoremleri gibi en güzel ve kuvvetli sonuçları Gauss-Bonnet Teoremi'nin derinleşmiş genellemeleri olarak görülebilir.

Bu kitabın yazımı yazarın Gauss-Bonnet Teoremi'nin anlaşılabilir bir kanıtını fazlaca diferansiyel geometri kullanmadan sadece türevlenebilir manifoldlar teorisi dilinde yazma arzusu ile 2010 yılı Haziran ayında başlamıştır. İlk başta sadece yazarın ODTÜ'de vermiş olduğu "Calculus on Manifolds" ve "Differentiable Manifolds" derslerine ait notların kapsamlı bir şekilde elden geçirilerek yazılması amaçlanmıştı. Daha sonra ise Gauss-Bonnet Teoremi'nin genel hali ve bunu yapmak için gerekli teorilerin de kitaba dahil edilmesine karar verildi. Oluşturulan bu teorilerin diğer birçok sonucunu da kitaba eklememek olmazdı. Böylece kitap vektör demetlerinin karakteristik sınıfları ve çeşitli uygulamalarıyla son buldu. Şunu belirtelim ki Guillemin ve Pollack'ın *"Differential Topology"* ([16]) adlı kitabı yazarın model aldığı kaynaklarından biridir. Bu kitap sadece içeriği bakımından değil yazım üslubu açısından da vazgeçilmez. Özellikle birçok önemli teoremin kanıtlarının küçük parçalar halinde okuyucuya yaptırılması eğitsel açıdan da çok doğru bir yaklaşımdır.

Birinci ünite bu kitabı okuyabilmek için gerekli olan topoloji, analiz ve doğrusal cebir konularının bir özetini içermektedir. Her ne kadar bu konuların hemen hemen hepsi lisans derslerinde görülmüş olsa da, öğrencilerin lisans üstü eğitime birçok eksikle başladığı göze çarpmaktadır. Örneğin matematikteki en önemli yapılardan biri olan bölüm kümeleri, grupları, uzayları gibi çok temel konular doktora öğrencilerinin zihninde dahi tam oturmamış olabiliyor. Bunun yanında lisans eğitiminin ilk yıllarında görülen doğrusal cebir konularının hızlıca gözden geçirilmesi yerinde olabilir. Kitabın bütünlüğünü korumak amacıyla bu ünitede, Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Teoremi, Ters Fonksiyon Teoremi ve doğrusal operatörlerin temel formları kanıtlarıyla verilmiştir. Ünite içinde yer kalmadığı için bahsedemediğimiz bazı önemli detaylar ise alıştırmalarda karşınıza çıkacaktır.

İkinci ünite ise kitabın temel unsurları olan manifoldların tanımı ile başlıyor. Teğet vektör ve teğet vektör demetinin yapısı verildikten sonra, manifoldların Öklit uzayına gömülmesi için hazırlık yapıyoruz. Bu kapsamda sonraki ünitelerde de sürekli yararlanacağımız Sard Teoremi'ni kanıtı ile vereceğiz. Tıkız manifoldların gömülmesi konusunu bu ünite içinde işlerken, tıkız olmayanların gömülmesi konusunu alıştırmalarda okuyucuya bırakacağız. Bu işlemler için gerekli olan Birimin Ayrışımı Teoremi'ni de kanıtıyla sunacağız. Daha sonra manifoldlar üzerinde türevlenebilir formları ve Stokes' Teoremi'ni vereceğiz. Bunu yaparken vektör uzaylarının ve manifoldların yönlendirilmesi konusunu son derece dikkatle yapmaya çalışacağız. Bu bağlamda karmaşık manifoldlar üzerindeki doğal yönlendirmeden bahsedecek ve bu doğal yönlendirmenin çarpıcı sonuçlarından bir iki örnek sunacağız. Öklit uzayı içindeki disk ve kürelerin hacimlerini hesaplama işini de bu üniteye sıkıştıracağız.

Üçüncü ünite manifoldların Euler sınıfının manifold üzerindeki herhangi bir Riemann metriğinin eğriliği cinsinden ifade edilebilmesi için gerekli alt yapıyı oluşturmak amacıyla yazılmıştır. İlk önce manifold üzerinde verilen bir vektör alanının integralinin varlığını gösterdik. Daha sonra bunu kullanarak Lie türevini tanımladık ve Lie türevinin temel özelliklerini çıkardık. Diğer taraftan, manifold üzerine Riemann metriği koyduktan sonra jeodeziklerden bahsetmemek olmazdı. Jeodezik eğri diferansiyel denkleminin Fourier Serileri yardımıyla standart olmayan bir kanıtını da bu üniteye koyduk. Ayrıca manifoldlar üzerinde jeodezik-konveks komşulukların varlığını Spivak'ın kitabındaki sunumu ([36]) takip ederek yaptık. Daha sonra vektör demetlerini ve demetlerin cebirini tanımladık. Teğet vektör demetinde olduğu gibi bu demetler üzerine de metrik koyarak demetlerin geometrisini bağlantı ve eğrilik formları yardımıyla anlamaya çalıştık. Eğrilik formunu altıncı ünitede Euler sınıfını tanımlamak için kullanacağız. Bu ünite, Poincaré Yarı Düzlemi'nin jeodeziklerinin belirlenmesi ve jeodeziklerin bir uygulaması olan Tüp Komşuluk Teoremi ile sona erdi.

Dördüncü ünite De Rham Kohomolojisinin tanımı ile başlıyor. Çemberin kohomolojisini doğrudan hesapladıktan sonra bunun uygulaması olarak sarılma, dönme ve geçişme sayılarını tanımlayıp çeşitli hesaplamalar yapacağız. Daha sonra iki boyutlu kürenin kohomolojilerini doğrudan hesaplayıp burada kullanılan fikirleri homolojik cebirle birleştirerek Mayer-Vietoris dizisini oluşturacağız. Bu dizi yardımıyla kürelerin ve bazı diğer manifoldların kohomoloji vektör uzaylarını belirledik. Poincaré izomorfizmasını kanıtlayabilmek için tıkız destekli kohomolojiyi tanımlayacağız ve bu kohomoloji teorisini kullanarak manifoldlar arasındaki fonksiyonların derecesini tanımlayıp hesaplamalar yapacağız. Bu hesaplamalardan birisi daha çok cebirsel topoloji kitaplarında bulunan, bir küreden kendisine giden ve derecesi sıfır olan fonksiyonların sabite homotopik olduğunun kanıtlanmasıdır. Bu kanıt oldukça teknik olduğu için, bu sonucun çemberler için olan özel hali, aynı fikirler yardımıyla alıştırmalarda kanıtlanmaktadır. Bu ünite Poincaré İzomorfizması ve bazı uygulamaları ile bitecektir.

Beşinci ünite kesişim teorisinin kuruluşu ile başlayacaktır. Daha sonra alt manifoldların Poincaré dualini tanımlayıp, bunu alt manifoldların kesişimlerinden yararlanarak kohomoloji halkalarının hesaplanmasında kullanacağız. Ayrıca alt manifoldların Poincaré dualini kullanarak Gysin Tam Dizisi'ni oluşturacağız. Bu diziyi ise Leray-Hirsch ve Künneth teoremlerini kanıtlamakta kullanacağız. Bu ünitede ayrıca Poincaré-Hopf Teoremi'ni ve Lefschetz Sabit Nokta Teoremi'ni kanıtlayacağız. Temel bazı örneklerde alt manifoldların kesişimlerini doğrudan hesaplayacağız. Bunların içinde karmaşık projektif uzay içindeki alt manifoldların kesişimleri ve gerçel projektif düzlemin karmaşık düzlem içinde kendisi ile kesişimi yer alacaktır. Cebirsel eğriler teorisinin en temel sonuçlarından olan Bezout Teoremi, Riemann-Hurwitz Teoremi ve Hurwitz Teoremi'nin kanıtları ile bu üniteyi bitireceğiz. Cebirsel eğriler ve yüzeyler cebirsel geometrinin yanı sıra diferansiyel geometri ve topoloji açısından da çok zengin bir örnek kaynağıdır. Bu ünitenin alıştırmaları kuadratik formların Arf değişmezinin ve bunun uygulaması olan topolojik Arf değişmezinin bir sunumunu da içermektedir.

Altıncı ve son ünite Euler karakteristik sınıfının kuruluşu ile başlayacak. Gauss-Bonnet Teoremi'nin kanıtını verdikten sonra karmaşık vektör demetlerinin Chern karakteristik sınıflarını tanımlayacağız. Chern sınıflarının bir uygulaması olarak "yan yana gelme eşitliği"ni vereceğiz. Buradan da Derece-Cins formülünü elde edeceğiz. Aslında değişik fikirler içerdiği için Derece-Cins formülünün Chern karakteristik sınıflarını kullanmayan bir başka kanıtını da sunacağız. Bu yaklaşım aynı dereceye sahip tüm cebirsel eğrilerin oluşturduğu uzayın (bir çeşit Moduli Uzayı) incelenmesine dayanır ve eğriler dışındaki diğer cebirsel (yüzeyler veya yüksek boyutlu) nesnelere de uygulanabilir. Son olarak türevlenebilir manifoldların Pontryagin karakteristik sınıflarını ve sayılarını tanımlayıp bu sayıların bazı topolojik uygulamalarını göreceğiz. Bu uygulamalardan en dikkat çekici olanı Milnor'un 1962 yılında kendisine Fields Madalyası kazandıran çalışmalarından biri olan 7-boyutlu egzotik küreler ile ilgili 1956 tarihli çalışmasıdır ([28]). Annals of Mathematics dergisinde yayınlanan 6 sayfalık makale son derece anlaşılabilir olmakla beraber tekil homoloji dilini kullandığı için kitaba doğrudan konulamadı. Milnor'un makalesini takip ederken tekil homoloji içeren bölümlerini kitabın bütünlüğünü korumak adına De Rham Kohomolojisi ile değiştireceğiz.

Dikkatli okuyucularımız Gauss-Bonnet Teoremi'nin yaygın olarak bilinen ve Gauss'un jeodezik üçgenlerle ilgili sonucunu kullanan kanıtını vermediğimizi fark edeceklerdir. Bunun önemli bir nedeni bu kanıtın tıkız yüzeylerin bir üçgenleme kabul ettiği gerçeğini kullanmasıdır. Bu sonuç ilk olarak 1925 yılında Radó [32] tarafından kanıtlanmıştır. Fakat Radó'nun vermiş olduğu kanıt oldukça zordur ve içerik olarak bu kitabın alanının dışında kalır. Bu kitabın ele aldığı tüm konular klasik sayılabilir. Bu nedenle kitabın içindeki muhtemel matematiksel hatalar ve yazım yanlışları dışındaki hiçbir ifadenin özgünlüğü iddia edilmemektedir.

Kitabı okumak isteyen veya derslerinde kullanmak isteyen akademisyenlere faydalı olabilecek birkaç noktayı belirtmek istiyorum: Birinci ünite kitabı rahat şekilde takip edebilmek için gerekli alt yapıyı oluşturmak için yazılmıştır. Dolayısıyla, gerekli alt yapıya sahip okuyucular doğrudan bir sonraki üniteye geçebilirler. Diğer taraftan lisans derslerinde pek zaman ayrılamayan Ters Fonksiyon Teoremi ile Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Teoremi'ni kanıtlarıyla sunuyoruz. Ayrıca boyutu sonlu olan vektör uzayları üzerinde tanımlı doğrusal operatörlerin temel formları detaylarıyla okuyucuya sunulmuştur.

Bir dönemlik türevlenebilir manifoldlar dersi için şöyle bir yol izlenebilir: Birinci ünitenin gerekli görülen yerleri hızlıca yapıldıktan sonra ikinci ünite detaylarıyla yapılmalıdır. Üçüncü üniteden sadece 3.1 yapılarak yola devam edilebilir. Dördüncü üniteden ise sadece 4.1, 4.2 ve 4.3.1 işlenerek ders bitirilebilir. Diferansiyel geometri derslerinden Gauss eğriliğini görmüş bir öğrenci grubuna Sonuç 6.1.11 (Gauss-Bonnet Teoremi) ve bunu takip eden kanıt da verilebilir.

Eğer iki dönemlik bir plan yapılmak isteniyorsa tüm kitap okunabilir. Yine öğrencilerin diğer derslerde görmüş oldukları konular hızlı bir şekilde hatırlatılarak geçilebilir. Bu kitabı çalışan bir öğrenci türevlenebilir manifoldların temel özelliklerinin yanı sıra vektör demetleri ve karakteristik sınıflar konusunda da temel bilgilere kavuşmuş olacaklardır. Ayrıca cebirsel topolojinin konuları olan tıkız destekli kohomoloji, derece teorisi, Leray-Hirsch ve Künneth teoremlerini de görmüş olacaklardır. Diğer taraftan, cebirsel topoloji derslerinde önemli bir yer tutan Temel Grup ve Örtü Uzayları ise kitabımızda yer almamaktadır.

Ülkemizdeki bir çok lisans üstü program cebir ve diferansiyel geometri alanlarında oldukça kuvvetlidir. Diğer taraftan, diferansiyel topoloji, cebirsel topoloji ve cebirsel geometri konularında büyük eksiklikler vardır. Bu nedenle ilk üç ünite birçok okulda hızlı bir şekilde işlenebilecekken kitabın geri kalanında daha yavaş ve dikkatli olunmalıdır. Muhtemel zaman darlıklarından dolayı bazı teoremlerin kanıtları öğrencilere bırakılabilir. Ayrıca alıştırmalar öğrencilerin en fazla zaman harcaması gereken yerlerdir. Alıştırmalar öğrenci tarafından konuları özümsemek adına birer fırsat olarak görülmelidir. Problem çözmeden matematik öğrenmeyi beklemek, yüzmeyi veya bisiklete binmeyi iyi bilen birini seyrederek bunları öğrenmeyi beklemeye benzer. Bunun ise pek mümkün olmadığı tecrübelerimizle sabittir.

Kapak Sayfaları Hakkında

Arka kapaktaki resimde yer alan heykel ODTÜ Mimarlık Fakültesi önünde bulunmaktadır. 'İsimsiz Heykel' olarak bilinen bu heykel 1982 yılında Rolf Westphall tarafından yapılmıştır. Heykel uzayda herhangi ikisi aykırı olan üç doğrudan oluşmaktadır. Uzayda herhangi ikisi aykırı olan n doğrunun durumları (konfigürasyonları) önemli ve zor bir problemdir. Problemin ancak $n \leq 7$ olduğu durumlarda çözümü vardır. Bu konuyla ilgili kapsamlı bir makale [42] nolu referansta bulunmaktadır.

Kapaklar grafik tasarımcısı İdil Ayçe Aba tarafından hazırlanmıştır.

Teşekkür

Matematik öğrenme sürecinde ve akademik hayatımda çok büyük desteklerini gördüğüm Turgut Önder'e ve doktora tez danışmanım Selman Akbulut'a minnettarım. Matematik okumayı, yazmayı, resmini çizmeyi ve yapmayı bana gösteren O.D.T.Ü. ve Michigan State Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Michigan State Üniversitesi doktora programına kabul edilmemdeki katkılarından dolayı Charles L. Seebeck'e ayrıca teşekkür ederim. Yirmi yılı aşkın bir süredir görev yapmaktan zevk aldığım O.D.T.Ü. Matematik Bölümü'ndeki tüm çalışma arkadaşlarıma ve öğrencilerimize bu güzel çalışma ortamı için teşekkür ediyorum. Kitabın yazımı sırasında ihtiyaç duyduğumda yardımlarını esirgemeyen, doğrudan veya dolaylı olarak katkı sağlayan İdil Ayçe Aba, Haydar Alıcı, Hüseyin Altundağ, Nurömür Hülya Argüz, Refik İnanç Baykur, Seda Barış, Hayati Bennun, Mehmet Büge, Baran Çetin, Mehmet Dağlı, Engin Kaya, Yasir Kızmaz, Belgin Korkmaz, Mustafa Korkmaz, Lale Özgenel, Ferit Öztürk, Ayla Ross, Süleyman Kaan Samurkaş, Sinan Sertöz, Bayram Tekin, Andreas Tiefenbach, Bülent Tosun, Muhiddin Uğuz, Çağlar Uyanık, Üstün Yıldırım ve Burak Yıldız'a teşekkür ediyorum. Kitabın hakemliğini yapmış olan meslektaşlarıma harcadıkları zaman ve emek için teşekkür ederim. Katkıları sayesinde kitap çok daha rahat okunur ve anlaşılır bir hale geldi. Ayrıca bilimle tanışmama yardım eden Faruk Ekiz, Rahmi Önkibar ile Zeki Yıldırım'ı ve beni her zaman destekleyen anne ve babamı şükranla anıyorum. Varlıklarından her zaman güç aldığım kardeşlerime de sonsuz teşekkürler.

Son olarak, sürekli destek olmanın yanı sıra kitabın ilk halini detaylı bir şekilde okuyan sevgili eşim Ferihe Atalan'a, ilham kaynaklarım olan oğlum ve kızıma, yaklaşık otuz yıldır mensubu olmaktan gurur duyduğum ve bana kattıkları için kendimi hep borçlu hissettiğim Orta Doğu Teknik Üniversitesi'ne minnettarım.

Yıldıray Ozan
O.D.T.Ü. Ankara

İçindekiler