Galois Teori, Örtü Uzayları ve Diferansiyel Denklemler

8 Aralık 2017
Hacettepe Üniversitesi

Galois Teori:

$F \subseteq E$ bir Galois çözüm genişlemesi

$$G = Gal(E/F) = \{\phi : E \to E \mid \phi \text{ otomorfizm}, \ \phi(x) = x, \ \forall x \in F\}$$

$$|G| = |E : F|$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, dash] & F \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
H \arrow[r] \arrow[d, dash] & E^H = \{x \in E \mid \phi(x) = x, \ \forall \phi \in H\}. \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
\{1\} \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

Ayrıca $H \trianglelefteq G$ ise E^H/F de bir Galois genişlemesidir ve karşılık gelen Galois grubu G/H olur.

Örnek: $F=\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{2}] = E$, öyle ki

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E $p(x)=x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$

polinomunun "splitting" cismidir).

$Gal(E/F) = S_3 = \langle \phi, \psi \mid \phi^3 = \psi^2,\ \psi\phi\psi = \phi^2 \rangle$

$\psi: E \to E$, $\psi(\omega) = \omega^2 = \overline{\omega}$, $\psi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$.

$\phi: E \to E$, $\phi(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$, $\phi(\omega) = \omega$

$\psi^2 = id_E$, $\phi^3 = id_E$ ve son olarak

$\psi \circ \phi \circ \psi\ (\omega) = \omega = \phi^2(\omega)$ ve

$$\psi \circ \phi \circ \psi(\sqrt[3]{2}) = \psi(\phi(\sqrt[3]{2})) = \psi(\omega\sqrt[3]{2})$$
$$= \omega^2\sqrt[3]{2}$$
$$= \phi^2(\sqrt[3]{2})$$

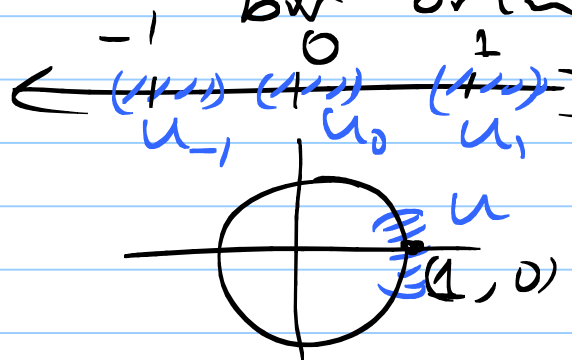
$\therefore\ \psi \circ \phi \circ \psi = \phi^2$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & S_3 = G = \langle \phi, \psi \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & \mathbb{Q} = E^G = \mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{2}] \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] & \\
 & \langle \phi \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \arrow[rrr, leftrightarrow] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[ddl, dash] & & & \mathbb{Q}[\omega] = E^{\langle \phi \rangle} \arrow[d, dash] \arrow[dddl, dash] & \\
\langle \psi \rangle \arrow[d, dash] & \langle \psi \phi \rangle \arrow[d, dash] & \langle \psi \phi^2 \rangle \arrow[dl, dash] & E^{\langle \psi \rangle} = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \arrow[dd, dash] & E^{\langle \psi \phi \rangle} = \mathbb{Q}[\omega \sqrt[3]{2}] \arrow[ddl, dash] & E^{\langle \psi \phi^2 \rangle} = \mathbb{Q}[\omega^2 \sqrt[3]{2}] \arrow[ddll, dash] \\
 & \{1\} \arrow[drr, leftrightarrow, bend right] & & & & \\
 & & & E & &
\end{tikzcd}
$$

Örtü Uzayları

$p: Y \to X$ topolojik uzaylar arasında sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer verilen her $x \in X$ noktası etrafında bir $x \in U \subseteq X$ açık komşuluğu varsa, öyle ki $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ bir ayrık birleşimdir ve her $\alpha \in \Lambda$ için $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \to U$ bir homeomorfizmadır, bu durumda $p: Y \to X$ fonksiyonuna bir örtü uzayı denir.

Örnekler: 1) $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ bir örtü uzayıdır.



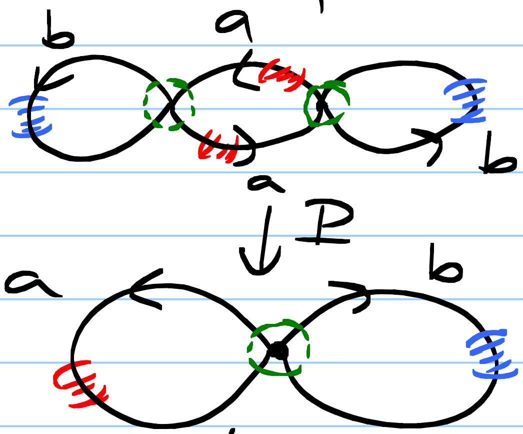
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(n, x) \mapsto n + x$$

$p(0) = (1,0)$

($\mathbb{Z}$-örtü)

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

2)



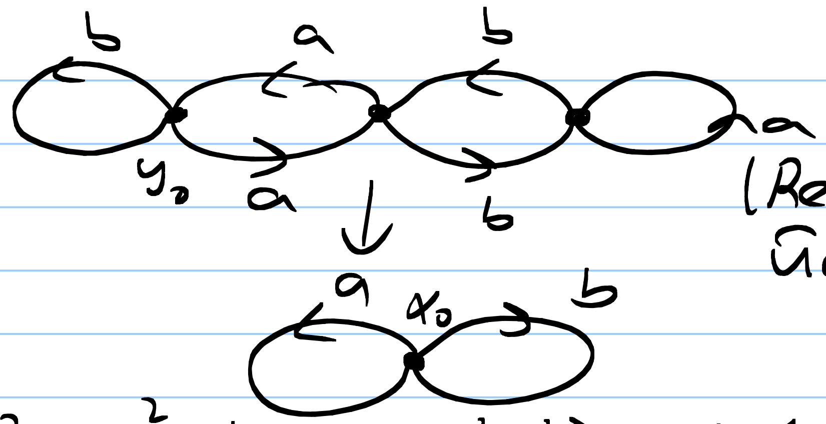
$Y \circlearrowleft \mathbb{Z}_2$-etkisi

($\mathbb{Z}_2$-örtü)

$X = Y/\mathbb{Z}_2$

$S^1 \vee S^1$

3)



(Regüler olmayan üç katlı örtü uzayı)

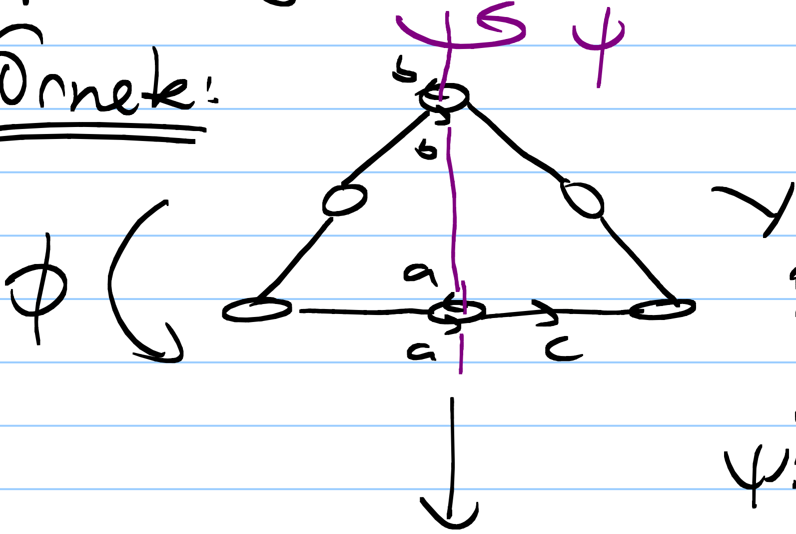
$$\langle b, a^2, ab^2a^{-1}, abab^{-1}a^{-1} \rangle \underset{3}{\leq} \langle a, b \rangle$$

<u>Önerme:</u> G sonlu grup, Hausdorff, tıkız ve bağlantılı bir Y uzayı üzerinde serbest olarak etki ediyorsa

$$p : Y \longrightarrow X \doteq Y/G \quad \text{bölüm}$$

fonksiyonu bir örtü uzayıdır.

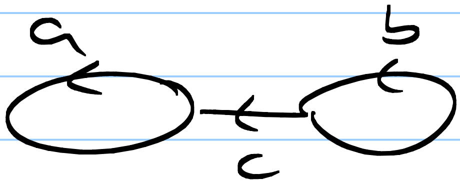
<u>Örnek:</u>



$S_3 = \langle \phi, \psi \mid \phi^3 = \psi^2 = 1, \ \psi\phi\psi = \phi^2 \rangle$

ϕ : düzlemin merkez etrafında $120°$ döndürme.

ψ: z-ekseni etrafında $180°$ döndürme



$X = Y/S_3$

(Regüler S_3-örtü uzayı örneği.)

Örtü uzaylarının sınıflandırılması temel gruplar yardımıyla yapılır.

Homotopi: $f_i : X \to Y$, $i=0,1$, sürekli fonksiyonlar olsun. $F : X \times [0,1] \to Y$ yine bir sürekli fonksiyon olsun öyle ki

1) $F(x,0) = f_0(x)$, $\forall x \in X$ için, ve

2) $F(x,1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$ için,

sağlansın.

Bu durumda f_0 ve f_1 fonksiyonlarına homotopik denir.

Temel grup X topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun

$$\pi_1(X) \doteq \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma \text{ sürekli fonk. } \gamma(0)=\gamma(1)=x_0\}$$
$$= \{[\gamma] \mid \cdots\}$$

$\gamma_0 \sim \gamma_1$ eğer γ_0 ile γ_1 homotopiklerse

Örnekler 1) $\pi_1(pt) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq \{1\}$

2) $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$

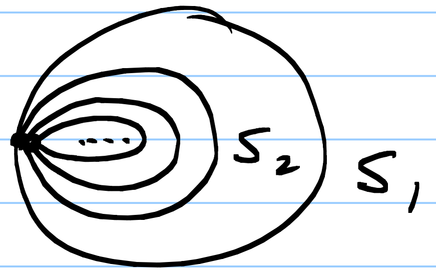
3) $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$

4) $\pi_1(\bigvee_n S^1) = F_n$

5) $\pi_1(\bigvee_{\mathbb{N}} S^1) = F_\infty$

6) $\pi_1(\bigcup_n S^1_n)$ F_∞'u içeren sayılamaz bir grup.

S^1_n yarıçapı $\frac{1}{n^2}$ olan çember.



Örtü uzayları için Galois Eşlemesi

Teorem: Eli yüzen düzgün topolojik bir uzayın örtü uzayları ile temel grubunun alt grupları arasında birebir bir eşleme vardır: (X, Y yol bağlantılı olsun.)

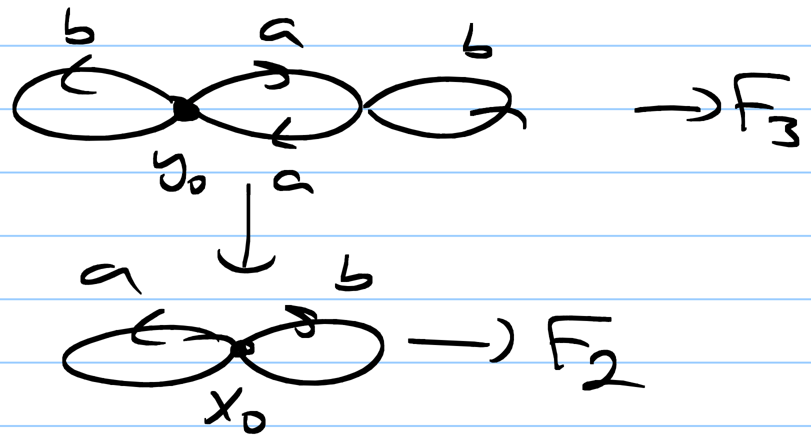
$$Y \xrightarrow{p_\#} X \longrightarrow p_\#(\pi_1(Y)) = H \leq \pi_1(X)$$

1) $[\pi_1(X) : H] = |p^{-1}(x_0)|$

2) Eğer $H \triangleleft \pi_1(X)$ ise $\pi_1(X)/_H$ grubu örtü uzayının izomorfizma (Deck transformations) $Deck(Y \to X)$ grubudur ve

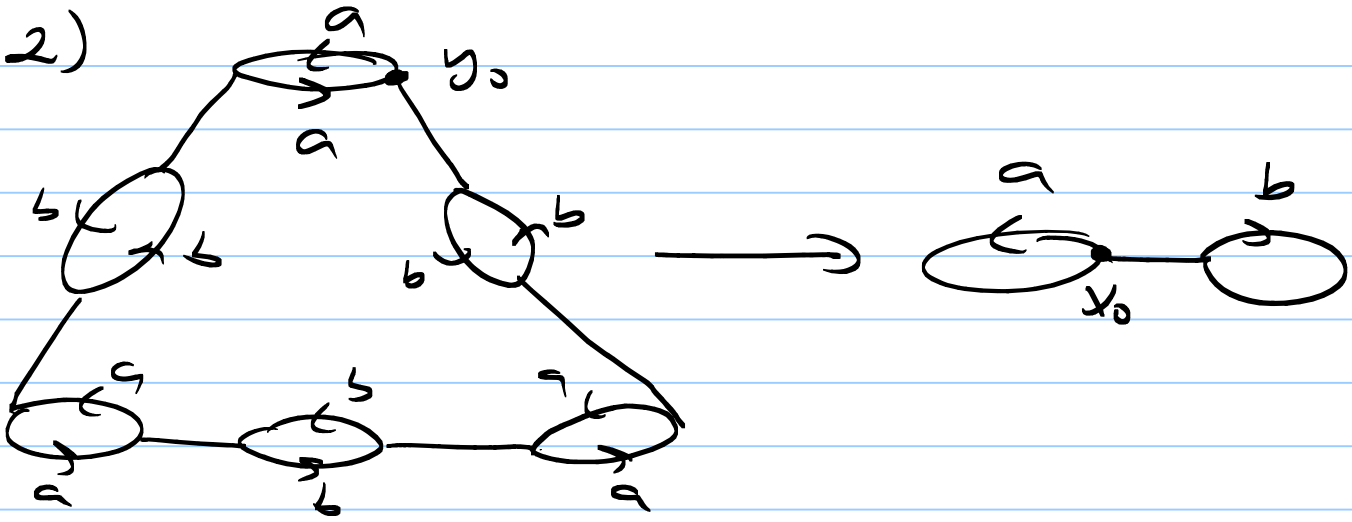
$$X = Y/_{Deck(Y \to X)}$$ bölüm uzayıdır.

Uygulama: 1)



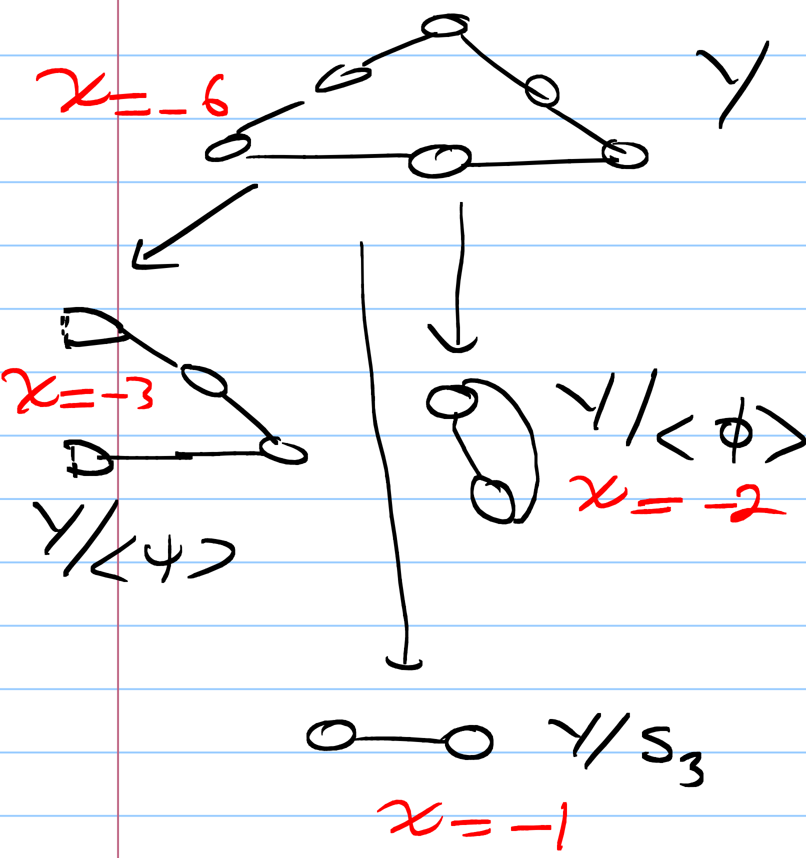
$$F_3 = \langle a^2, b, aba^{-1} \rangle \underset{2}{\triangleleft} \langle a, b \rangle = F_2$$

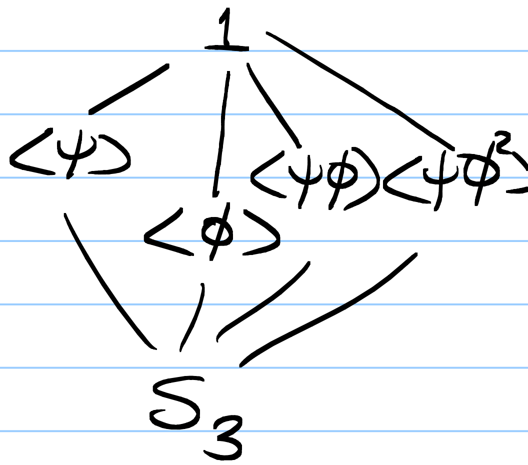
2)



$$N = \langle a^2,\ ab^2a^{-1},\ aba^2b^{-1}a^{-1},\ abab^2a^{-1}b^{-1}a^{-1},$$
$$ababa^2b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1},\ ababab^2a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1},$$
$$ababab\rangle \triangleleft F_2$$ olan öyle ki

$$F_2/N \simeq S_3. \qquad (N \simeq F_7)$$





2) Dessin Enfant:

$PSL(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle A, B \rangle,$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$PSL(2,\mathbb{Z})$'nin altgruplarını anlamak için örtü uzaylarını kullanmak:

$B\mathbb{Z}_2 = \lim_{n\to\infty} S^n / \mathbb{Z}_2 = S^\infty / \mathbb{Z}_2 \qquad \chi = \frac{1}{2}$

$B\mathbb{Z}_3 = \lim_{n\to\infty} S^{2n-1} / \mathbb{Z}_3 = S^\infty / \mathbb{Z}_3 \qquad \chi = \frac{1}{3}$

S^∞: büzülebilir bir uzaydır.

$S^\infty = \{ (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},$ öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki $n \geq n_0 \Rightarrow x_{n_0} = 0$ ve $\sum x_n^2 = 1 \}$

$T: S^\infty \to S^\infty, \quad T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$

$F_t(x) = \dfrac{(1-t)x + t\,T(x)}{\|(1-t)x + t\,T(x)\|}, \quad F_0 = Id_{S^\infty}, \quad F_1(x) = T(x).$

$S_0^\infty = \{(x_i)\in S^\infty \,/\, x_1 = 0\}$

$G: S_0^\infty \times [0,1] \longrightarrow S^\infty$, $G(x,t) = \dfrac{t(1,0,\dots,0)+(1-t)x}{\|\quad\quad\|}$

$G(x,0) = x$, $G(x,1) = (1,0,\dots,0,\dots)$.

$H: S^\infty \times [0,1] \longrightarrow S^\infty$,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$H(x,0) = id_{S^\infty}$, $H(x,1) = (1,0,\dots,0,\dots)$

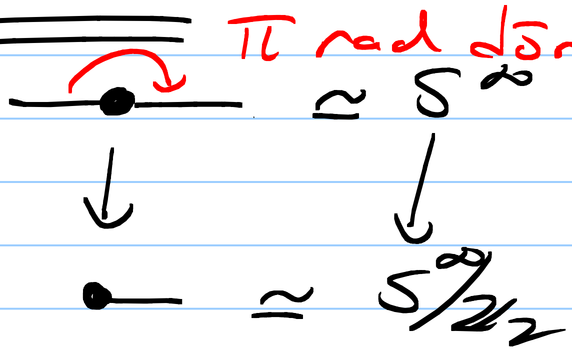
Sonuç: $\pi_1(B\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(B\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3$.

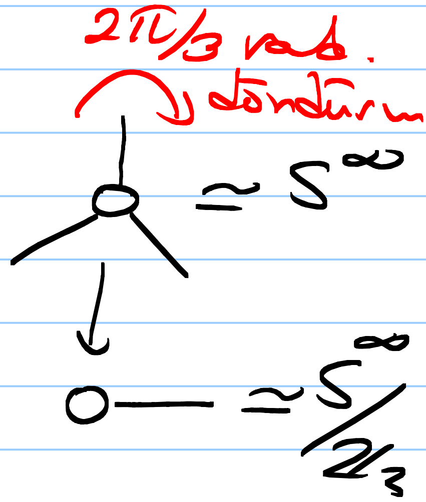
$(\pi_i(B\mathbb{Z}_2) = \pi_i(B\mathbb{Z}_3) = 0, \; i \geq 2\,!)$

Sonuç (Van Kampen Thm)

$\pi_1(B\mathbb{Z}_2 \vee B\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2,\mathbb{Z})$

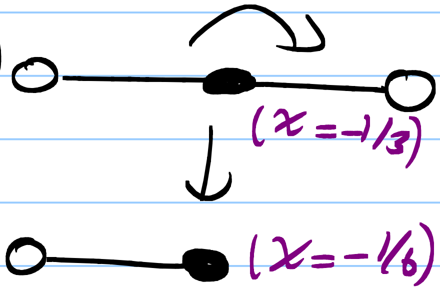
Gösterim





Örnekler:

1) π rad. döndürme



$(x=-1/3)$

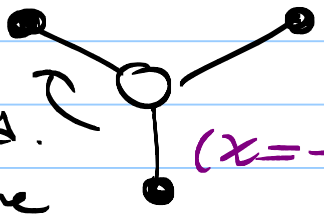
$(x=-1/6)$

$\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$

$\triangleleft\ (2)$

$\pi_1 \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2,\mathbb{Z})$

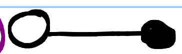
2) $2\pi/3$ rad. döndürme



$(x=-1/2)$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$

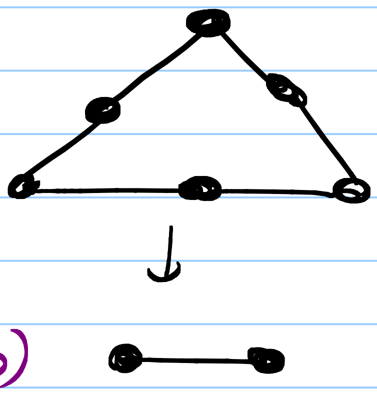
$\triangleleft\ (3)$



$(x=-1/6)$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

3)



$(x=0)$

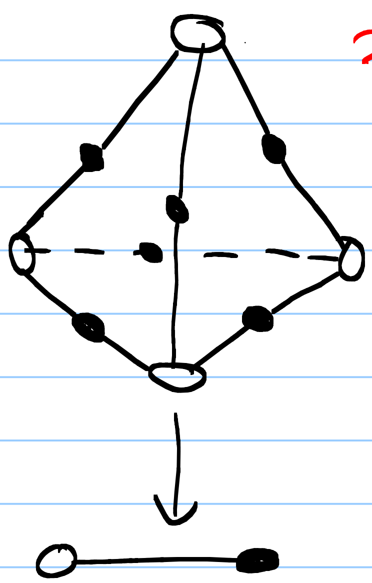
$\mathbb{Z}$

$\triangleleft\ (S_3)$

$(x=0)$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$

4)



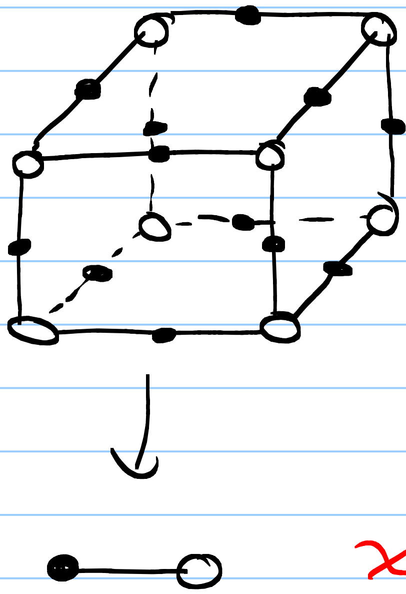
$x = 4-6 = -2$

$\{1,(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

$x = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1 = -\frac{1}{6} = \frac{-2}{12}$

$N \triangleleft PSL(2,\mathbb{Z})$

5)



$x = 8 - 12 = -4$

$\mathrm{Deck}(Y \to X) =$ Kübün simetri grubu

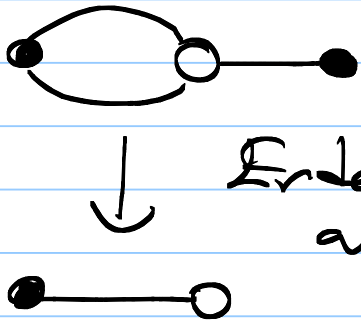
$|\mathrm{Deck}(Y \to X)| = 24$

Not! Dodecahedron bize $PSL(2,\mathbb{Z})/N$, $N \simeq F_5$ altgrubunu verir.

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{6} = \frac{-4}{24}$

$F_5 \simeq N \overset{24}{\triangle} PSL(2,\mathbb{Z})$

6)

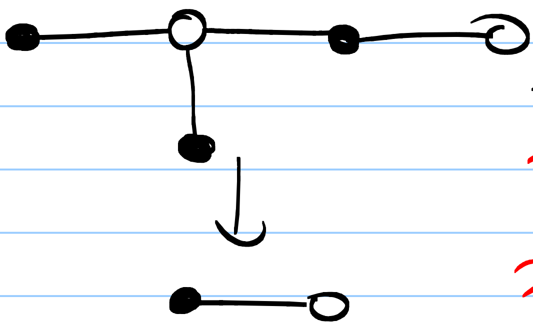


$x = 2 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

Endeksi 3 olan ve normal olmayan altgrup.

$x = -\frac{1}{6} = \frac{-1/2}{3}$

7)

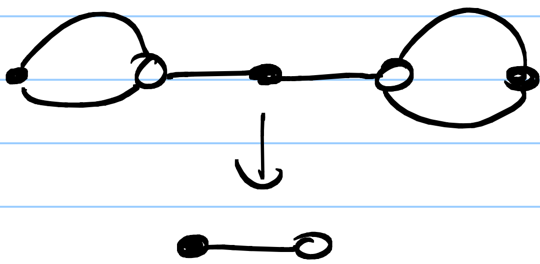


Endeksi 4 olan ve normal olmayan altgrup.

$x = 2 + 1 + \frac{1}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$

$x = -\frac{1}{6} = \frac{-2/3}{4}$

8)



Endeksi 6 olan ve normal olmayan altgrup.

Diferansiyel Denklemler

Teorem: $D \subseteq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge, P, Q D üzerinde analitik (holomorfik) fonksiyonlar olsun. Bu durumda verilen

$$(\#) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + P(z)\frac{dw}{dz} + Q(z)\,w = 0$$

denkleminin her $z_0 \in D$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ değerleri için

$$(*) \quad w(z_0) = \alpha \text{ ve } w'(z_0) = \beta$$

başlangıç değerlerini sağlayan tek bir çözümü vardır.

Başka bir deyişle, $V_\#$ ile $(\#)$ doğrusal denkleminin tüm çözümlerinin oluşturduğu vektör uzayı ile $\mathbb{C}^2$ arasında bir doğrusal izomorfizma vardır.

$$\begin{array}{ccc} V_\# & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ w & \longmapsto & (w(z_0), w'(z_0)) \end{array}$$

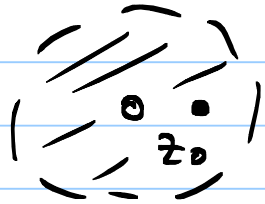
Şimdi $P(z)$ ve $Q(z)$ fonksiyonlarının meromorfik olduğu durumları inceleyeceğiz. Aslında sadece şu özel duruma bakacağız:

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ ve } z \neq 0 \}$$

$$K(D) = \{ f : D \to \mathbb{C} \mid f \text{ analitik fonksiyon} \},$$

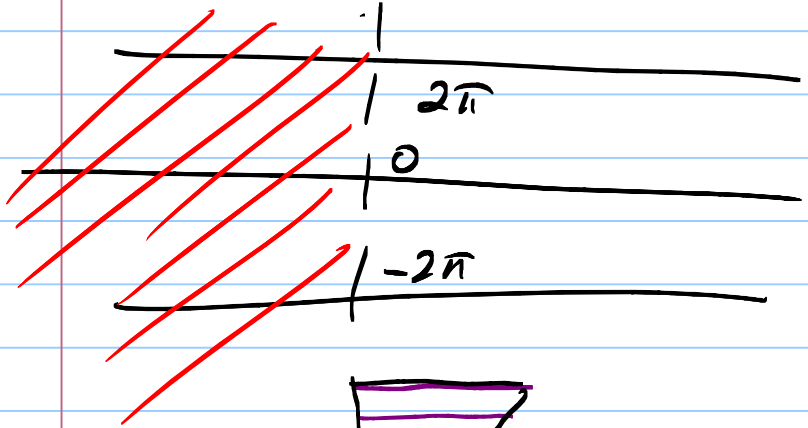
$P(z), Q(z) \in K(D)$ (dolayısıyla fonksiyonun $|z| < 1$ bölgesinde sadece $z = 0$ noktasında tekilliği olması durumunu inceleyeceğiz).

$z_0 \in D$ olsun. $\pi_1(D, z_0) \simeq \mathbb{Z}$



$\tilde{D} \longrightarrow D$ evrensel örtüsü olsun.

$\tilde{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ x < 0 \}$



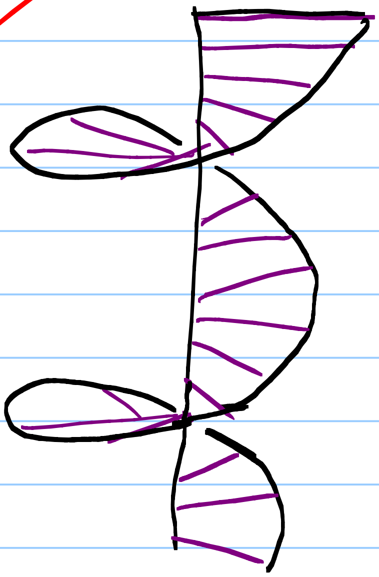
$\tilde{D} \longrightarrow D$

$z \longmapsto e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\gamma : \tilde{D} \longrightarrow \tilde{D}$

$z \longmapsto z + 2\pi i$

$\tilde{D}$:



$\gamma^* : K(\tilde{D}) \longrightarrow K(\tilde{D})$

$f(z) \longmapsto \gamma^*(f) = f \circ \gamma$

$= f(z + 2\pi i)$

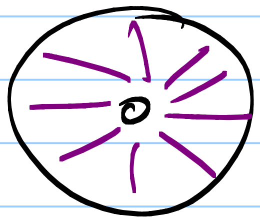
<u>Sonuç</u>: $K(D) = K(\tilde{D})^{\gamma^*}$

<u>Önemli Gözlem</u>:

$\pi_1(\tilde{D}) = (1)$, $\tilde{D}$ basit bağlantılı bir bölge!

$\pi \downarrow$

D :



$= \tilde{D} / \mathbb{Z} = \langle \gamma \rangle$

Şimdi $P, Q \in \mathcal{K}(D)$ iki analitik fonksiyon olsun.

$$\pi : \widetilde{D} \to D, \quad z = \pi(u) = e^u \text{ olmak}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} + P(z)\frac{dw}{dz} + Q(z)w = 0 \text{ denklemini}$$

$w = w(u)$ değişkenleri ile yazarsak

$$\frac{d^2w}{du^2} + (P(z)z - 1)\frac{dw}{du} + z^2 Q(z) w = 0$$

denklemini elde ederiz.

Eğer bu denklemin $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ üzerinde çözümü olsun istiyorsak $zP(z)$ ve $z^2Q(z)$ fonksiyonlarının $z=0$ noktasında da sürekli ve dolayısıyla analitik (holomorfik) olması koşulunu koymalıyız. Bu koşul ise

$$\lim_{z\to 0} zP(z) \quad \text{ve} \quad \lim_{z\to 0} z^2 Q(z) \quad \text{limitlerinin}$$

varlığına denktir. Bu son koşul $z=0$ noktasının regüler tekil nokta olması demektir.

Dolayısıyla, eğer $z=0$ regüler tekil bir nokta ise $\widetilde{D}$ basit bağlantılı bölgesinde tanımlı

$$(\widetilde{\#}) \quad \frac{d^2w}{du^2} + (\underbrace{P(e^u)e^u - 1}_{zP(z)-1})\frac{dw}{du} + \underbrace{e^{2u} Q(e^u)}_{z^2Q(z)} w = 0$$

denkleminin katsayıları sürekli (holomorfik) olduğu için denklemin her başlangıç değeri için $(w(u_0)=\alpha,\ w'(u_0)=\beta$ gibi) tek bir çözümü vardır.

$\gamma:\widetilde{D}\longrightarrow\widetilde{D}$, $\gamma(u)=u+2\pi i$, dönüşümü $e^{\gamma(u)}=e^{u}$ eşitliğini sağladığı için $\widetilde{\#}$ denkleminin bir $w=w(u)$ çözümünü bir başka $\gamma^{*}w=w\circ\gamma$ çözümüne götürür.

$$\gamma^{*}:\underset{\mathbb{C}^2}{\overset{\|}{V_{\widetilde{\#}}}}\longrightarrow \underset{\mathbb{C}^2}{\overset{\|}{V_{\widetilde{\#}}}},\quad \begin{bmatrix} w(u_0)\\ w'(u_0)\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix} w(\gamma(u_0))\\ w'(\gamma(u_0))\end{bmatrix}.$$

—— o —— o ——

$\widetilde{D}$ üzerinde elde ettiğimiz sonuçların D üzerinde de çözüm verip vermediğini araştıralım:

İlk önce $\widetilde{D}$ üzerinde şu fonksiyonları tanımlayalım:

$\log:\widetilde{D}\longrightarrow\mathbb{C}$, $\log u \doteq \ln r + i\theta$, $u=re^{i\theta}$

ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$u^{\alpha}:\widetilde{D}\to\mathbb{C}$, $u^{\alpha}\doteq e^{\alpha\log u}$

Gözlem: $\gamma:\widetilde{D}\to\widetilde{D}$, $\gamma(u)=u+2\pi i$ olmak üzere

$$\boxed{\gamma^{*}\log u=\log\gamma(u)=\log(u+2\pi i)=\log u+2\pi i}$$

ve $\gamma^* u^\alpha = (\gamma(u))^\alpha = e^{\alpha \log \gamma(u)} = e^{\alpha(\log u + 2\pi i)}$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma^* u^\alpha = e^{2\pi\alpha i} u^\alpha.}$$

Şimdi tekrar $\tilde{\#}$ denkleminin çözümlerine dönelim

$\gamma^* : V_{\tilde{\#}} \longrightarrow V_{\tilde{\#}}$ operatörünün

Jordan formu için iki durum vardır:

<u>Durum 1)</u> $[\gamma^*]_\beta = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $\beta = \{w_1, w_2\}$

Dolayısıyla öyle bir $\{w_1, w_2\}$ doğrusal bağımsız çözüm kümesi vardır ki

$\gamma^* w_1 = c\, w_1$ ve $\gamma^* w_2 = d w_2$ olur.

$c = e^{2\pi i \lambda}$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ seçelim. Bu durumda

$\gamma^* w_1 = e^{2\pi i \lambda} w_1$ olur. w_1 $\tilde{D}$ üzerinde analitik bir fonksiyon olsa da bunu $D = \tilde{D}/\langle\gamma\rangle$ üzerinde çok değerli bir analitik fonksiyon olarak görebiliriz.

Diğer taraftan z^λ ifadesi de D üzerinde çok değerli bir fonksiyondur.

Aslında $\gamma^* z^\lambda = e^{2\pi i \lambda} z^\lambda$ olduğu için

$$\gamma^*\left(\frac{w_1(z)}{z^\lambda}\right) = \frac{\gamma^* w_1(z)}{\gamma^* z^\lambda} = \frac{e^{2\pi i\lambda}\, w_1(z)}{e^{2\pi i\lambda}\, z^\lambda} = \frac{w_1(z)}{z^\lambda}$$

olur ve dolayısıyla $w_1(z)/z^\lambda$ D üzerinde iyi tanımlı (tek değerli) analitik bir fonksiyondur.

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ z \neq 0\}$ olduğu için

$w_1(z)/z^\lambda$ fonksiyonunun $z=0$ noktasındaki tekilliğini anlamamız gerekiyor. Buradan aşağıdaki teknik sonuç aradığımız cevabı veriyor:

<u>Teorem:</u> $w_1(z)/z^\lambda : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $z=0$ noktasında kutupsal tekilliğe sahiptir.

O halde, $\dfrac{w_1(z)}{z^\lambda} = \sum\limits_{n \geq -n_0} c_n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ şeklindedir.

$$\Rightarrow w_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 \neq 0,$$

$\lambda_1 = \lambda - n_0$; elde edilir.

Benzer şekilde, diğer çözüm de

$$w_2(z) = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_0 \neq 0,$$ şeklinde olmalıdır.

Durum 2) $[\gamma^*]_\beta = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\beta = \{\omega_1, \omega_2\}$

Dolayısıyla öyle bir $\{\omega_1, \omega_2\}$ doğrusal bağımsız çözüm kümesi vardır ki

$$\gamma^*\omega_1 = c\,\omega_1 \quad \text{ve} \quad \gamma^*\omega_2 = \omega_1 + c\,\omega_2 \text{ dir.}$$

Yukarıda olduğu gibi $\omega_1(z)$ için

$\omega_1(z) = z^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_0 \neq 0$ şeklinde bir (Yine $e^{2\pi i \lambda_1} = e^{2\pi i \lambda} = c$)

çözüm bulunur. $\omega_2(z)$ çözümü için ilk önce

$$\omega_3 = \frac{1}{2\pi i c}(\log(z-a))\,\omega_1(z) \quad \text{çok}$$

değerli fonksiyonuna bakalım.

$$\gamma^*\omega_3 = \frac{1}{2\pi i c}\,\gamma^*(\log(z-a))\,\gamma^*\omega_1(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi i c}\left(\log(z-a) + 2\pi i\right) c\,\omega_1$$

$$= \omega_1 + c\,\omega_3.$$

O halde, eğer $\omega_4 = \omega_2 - \omega_3$ olarak tanımlanırsa

$$\gamma^*\omega_4 = \gamma^*\omega_2 - \gamma^*\omega_3$$

$$= \cancel{\omega_1} + c\,\omega_2 - \cancel{\omega_1} - c\,\omega_3$$

$$= c\,(\omega_2 - \omega_3)$$

$$= c\,\omega_4$$

Buradan $w_4(z) = z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, $d_0 \neq 0$,

$e^{2\pi i \lambda_2} = c$, elde edilir.

O halde, ikinci çözüm

$$w_2(z) = w_3 + w_4$$

$$= \frac{1}{2\pi i c} \log z \, w_1(z) + z^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

elde edilir.

Ayrıca, $e^{2\pi i \lambda_1} = c = e^{2\pi i \lambda_2}$ olduğu için

$\lambda_1 - \lambda_2$ bir tam sayı olmalıdır.

Not: $P(z)$ veya $Q(z)$ fonksiyonlarının $n \geq 2$ sayıda tekil noktası varsa D bölgesinin temel grubu $\pi_1(D) = F_n$, n üreteçli serbest grup olacaktır.

Referanslar:

1) Yang-Hui He, James Read, Hecke groups, Dessins d'Enfant and the Archimedean Solids, Frontiers in Physics, 2015.
2) Yang-Hui He, John McKay, James Read, Modular groups, Dessins d'Enfant and Elliptic K3-surfaces, LMS J. Comput. Math. 16 (2013) 271-318.

3) J. Hekking, Belyi Pairs, Dessins d'Enfants and Hypermaps, 2014.

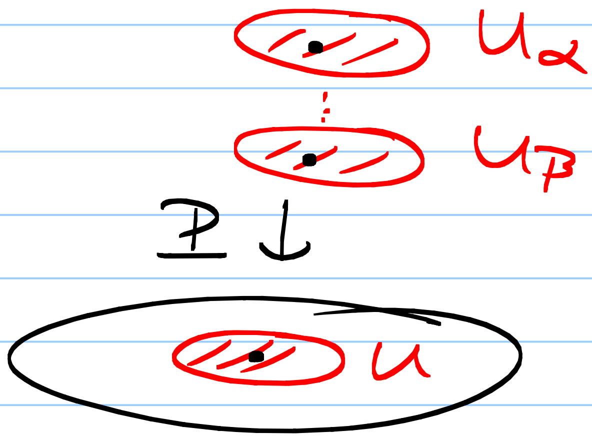
4) Michio Kuga, Galois' Dream, 1993, Birkhäuser

5) G.B. Shabat, V.A. Voevodsky, Drawing curves over number fields, 1990.

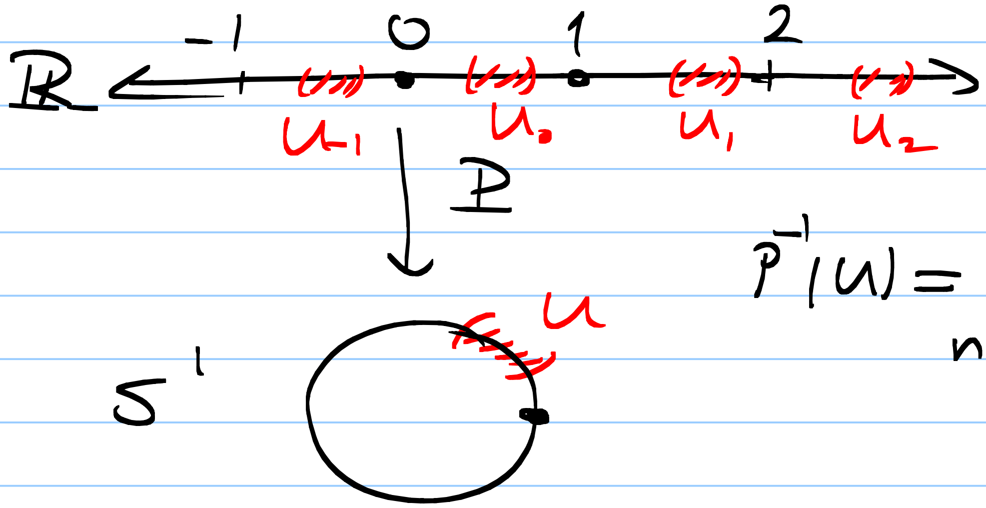
RESİMLER

ÖRTÜ UZAYI

$$\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ X \end{array}$$



$P: \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad P(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



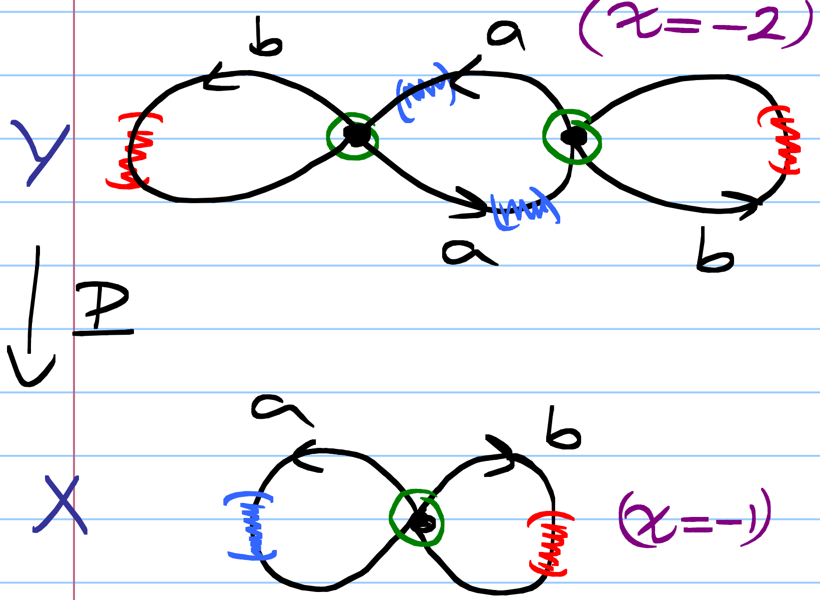
$$P^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$$

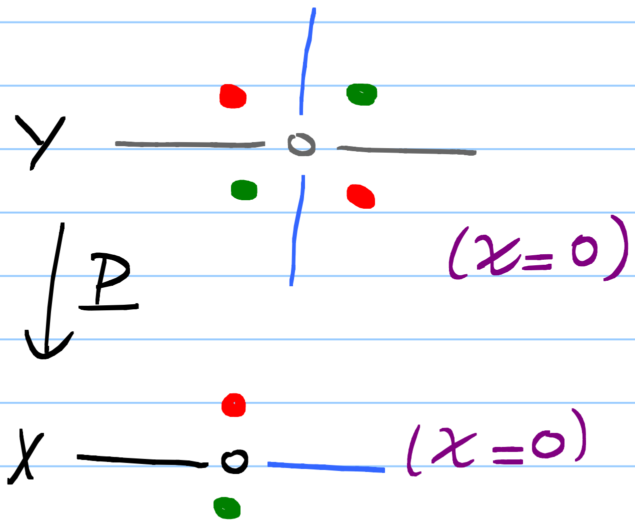
$$G = \langle \varphi \rangle \simeq \mathbb{Z}, \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x + 1$$

$$S^1 = \mathbb{R} / \langle \varphi \rangle$$

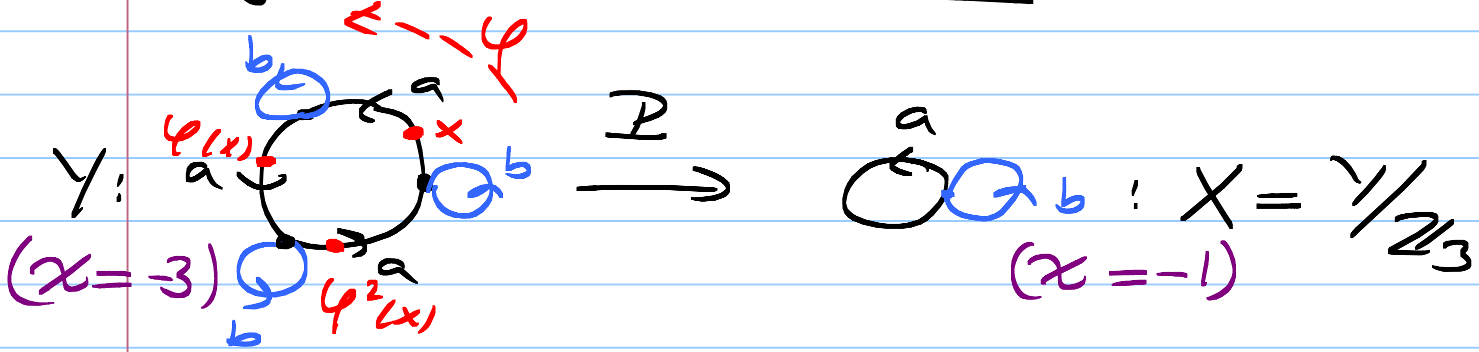
Bu bir $\mathbb{Z}$-örtü uzayıdır.

İki farklı $\mathbb{Z}/_2$-örtü uzayı



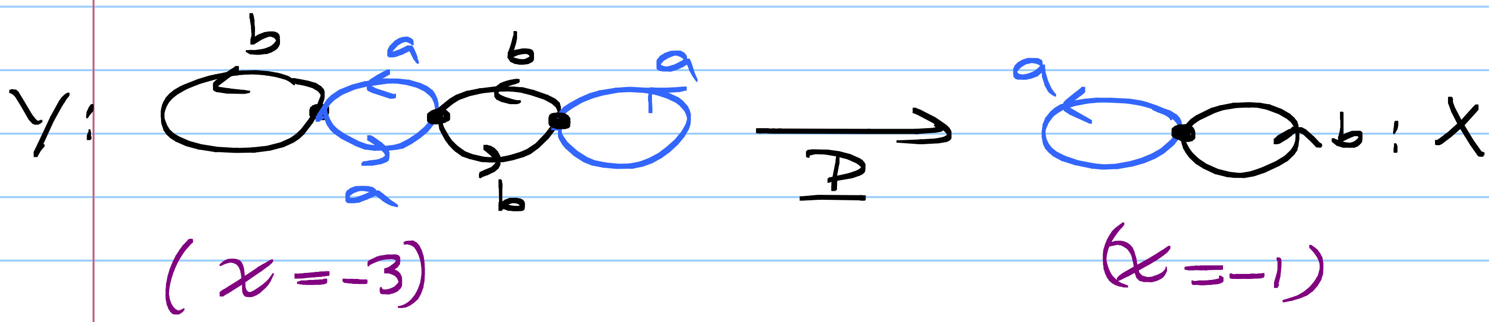


Regüler 3-katlı ($\mathbb{Z}/3$) örtü

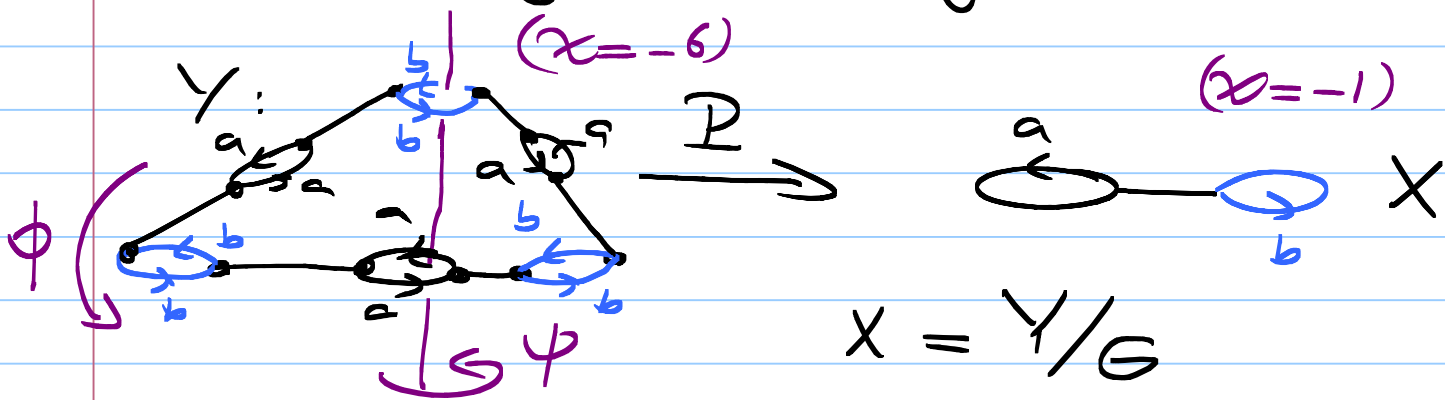


$G = \mathbb{Z}/3 = \langle \varphi \rangle$, φ: 120° döndürme

Regüler Olmayan 3-katlı örtü uzayı



6-katlı S_3-örtü uzayı

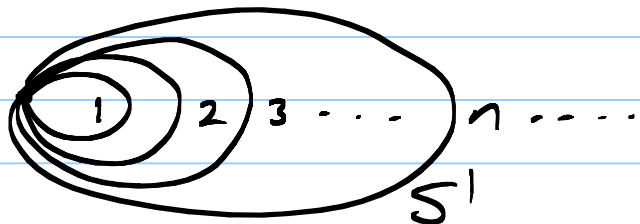


$$X = Y/G$$

$$G = \langle \phi, \psi \mid \phi^3 = \psi^2 = 1,\ \psi\phi\psi = \phi^2 \rangle \simeq S_3$$

ϕ: 120° döndürme, ψ: 180° döndürme

$X_1 = \bigcup_n S^1_n$

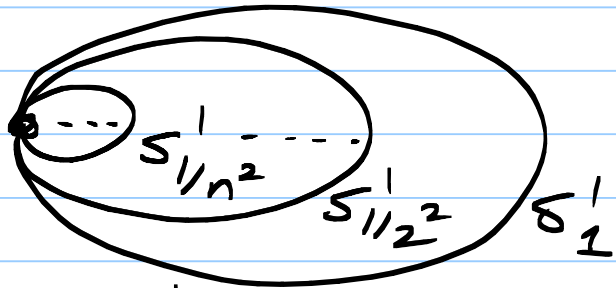


$\pi_1(X) = F_\infty$

(Sayılabilir grup)

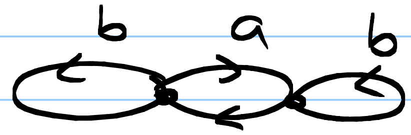
$n = 1, 2, 3, \ldots$

$X_2 = \bigcup_n S^1_{1/n^2}$



$\pi_1(X) = ?$

Sayılamaz bir grup!

$Y:$ 

$\pi_1(Y) \simeq F_3 = \langle a^2, b^2, aba^{-1} \rangle$

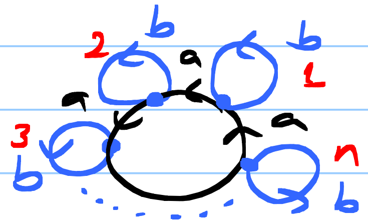
$(\chi = -2)$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \; \triangle\, 2$

$X:$ 

$\pi_1(X) \simeq F_2 = \langle a, b \mid \text{—} \rangle$

$(\chi = -1)$

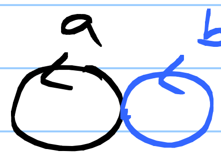
$Y:$ 

$(\chi = -n)$

$\uparrow \; G = \langle \phi \rangle$

$\phi = \frac{2\pi}{n}^{\circ}$

$\xrightarrow[P]{}$

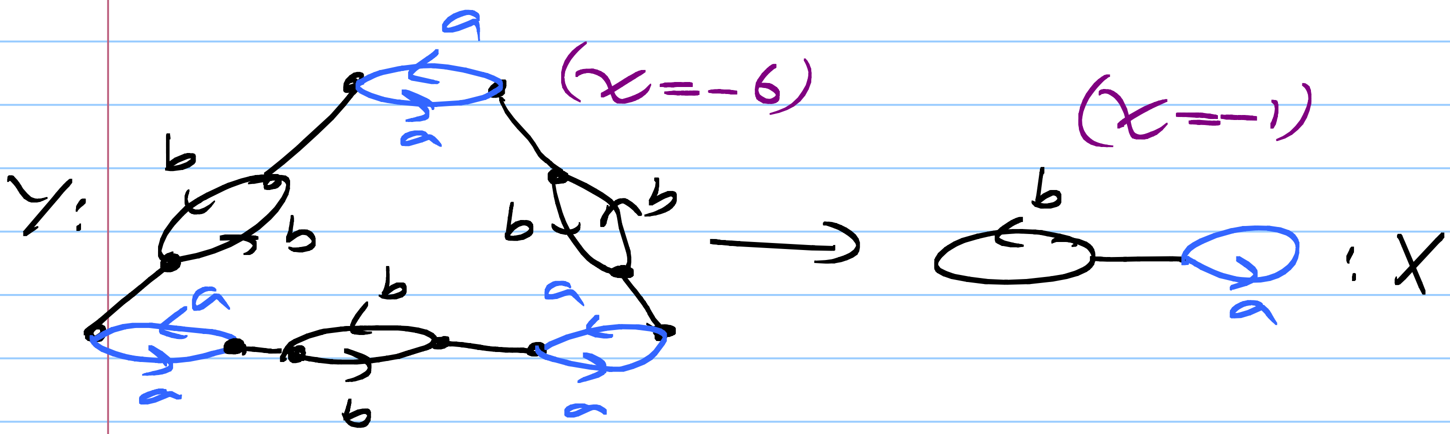


$: X$

$(\chi = -1)$

$Y = \bigvee_{n+1} S^1 \qquad\qquad X = \bigvee_2 S^1$

$$\underset{\underset{F_{n+1}}{\text{IS}}}{\pi_1(Y)} = \langle a^n, ab^ka^{-1} \mid k = 1, \dots, n \rangle \overset{n}{\triangleleft} \langle a, b \mid \text{—} \rangle = \underset{\underset{F_2}{\text{IS}}}{\pi_1(X)}$$



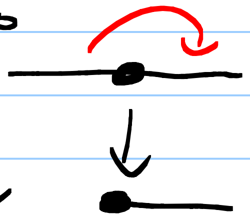
$$\pi_1(Y) \simeq F_7 \overset{6}{\trianglelefteq} F_2 = \pi_1(X)$$

$$\pi_1(X)/\pi_1(Y) \simeq S_3$$

Gösterim

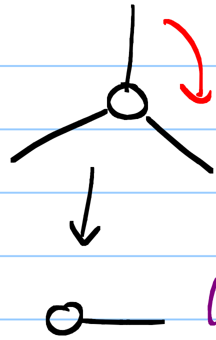
S^∞ 180° döndürme ($x=1$)

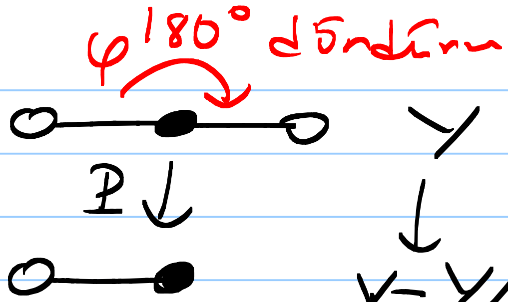
$S^\infty/\mathbb{Z}_2$ ($x=1/2$)



S^∞: 120° döndürüm ($x=1$)

$S^\infty/\mathbb{Z}_3$: ($x=1/3$)



1) 

$Y \quad (\chi = -1/3) \qquad \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$

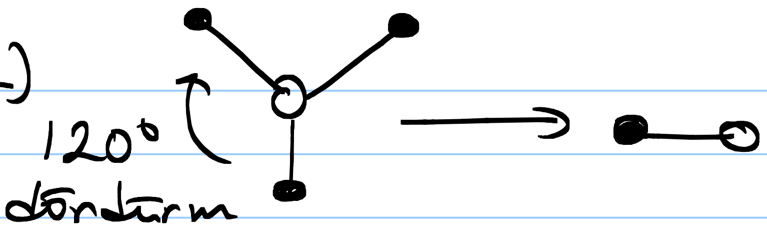
$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \triangle\!| \; 2$

$X = Y/\mathbb{Z}_2 = \langle \varphi \rangle \quad (\chi = -1/6) \qquad \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle \simeq PSL(2, \mathbb{Z})$$

$$\triangledown| \qquad\qquad \triangledown|$$

$$\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3 = \langle b, aba^{-1} \rangle$$

2) 

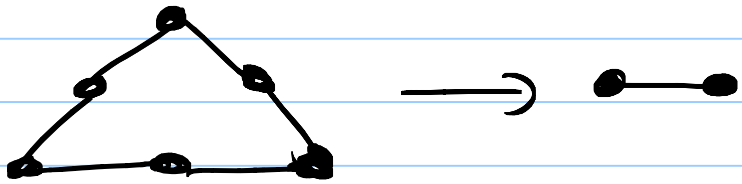
$x=-1/2$ $\qquad$ $x=-1/6$

$Y \longrightarrow X$

$\pi_1(Y) \simeq \ast_3 \mathbb{Z}_2$

$\triangle\!\!\setminus 3$

$\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \ast \mathbb{Z}_3$

3) 

Y $\quad x=0$ $\qquad$ X $\quad x=0$

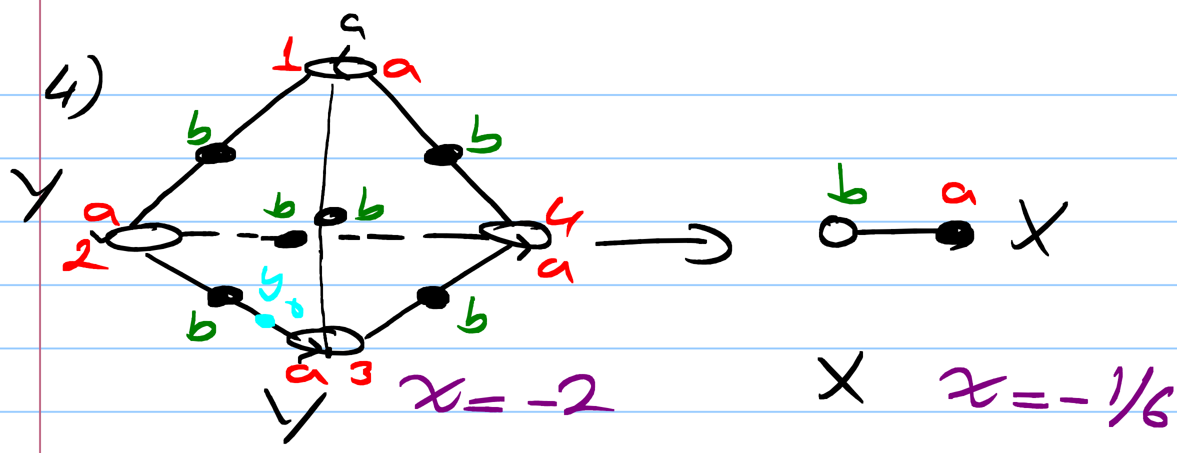
$\mathbb{Z}$

$\triangle\!\!\setminus$

$\mathbb{Z}_2 \ast \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2 \ast \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z} \simeq S_3$

4)



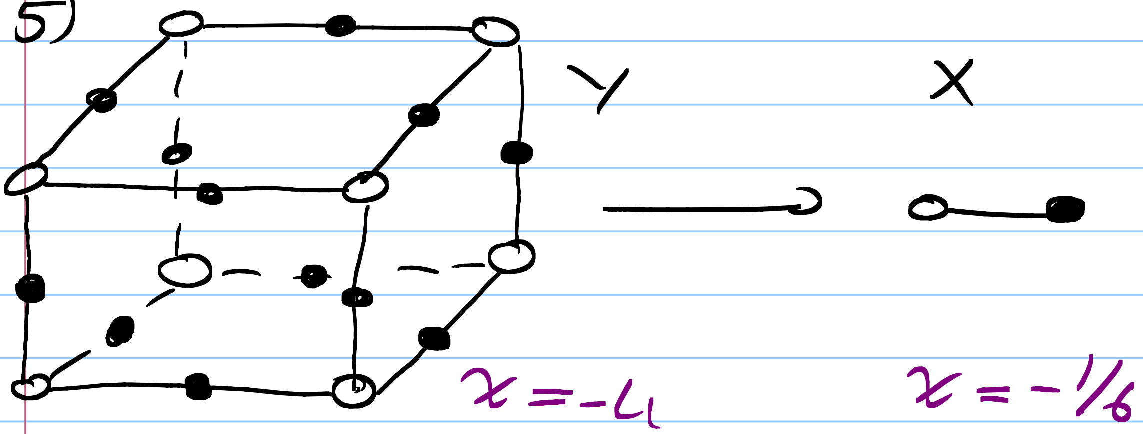
$$X = Y/G, \quad G = A_4$$

$$\pi_1(Y) \simeq F_3 \lhd \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2,\mathbb{Z})$$

$$PSL(2,\mathbb{Z})/F_3 \simeq G = A_4$$

$$F_3 = \langle ababab,\ a^{-1}ba^{-1}ba^{-1}b,\ a^{-1}baba^{-1}ba^{-1} \rangle$$

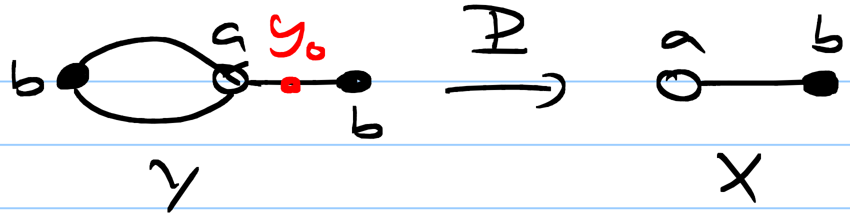
5)



$X = Y/G, \quad G = S_4$

$\pi_1(Y) \simeq F_5 \lhd \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = PSL(2,\mathbb{Z})$

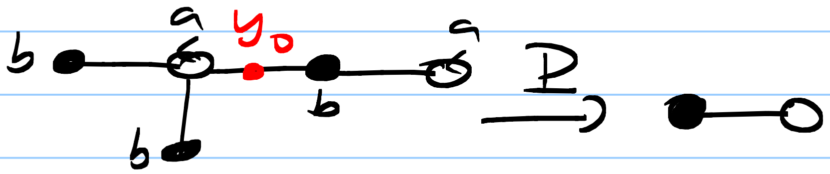
$PSL(2,\mathbb{Z})/F_5 \simeq S_4$

6) 

Normal olmayan 3 katlı örtü

$x = -1/2$ $\qquad$ $x = -1/6$

$\pi_1(Y, y_0) \simeq \langle aba^{-1}, b \rangle \underset{3}{\trianglelefteq} \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

7) 

(Normal olmayan 4 katlı örtü uzayı)

Y $\quad x = -2/3$ $\qquad$ X $\quad x = -1/6$

$\pi_1(Y, y_0) \simeq \langle aba^{-1}, a^{-1}ba, a \rangle \underset{4}{\leq} \langle a, b \mid \ \rangle$

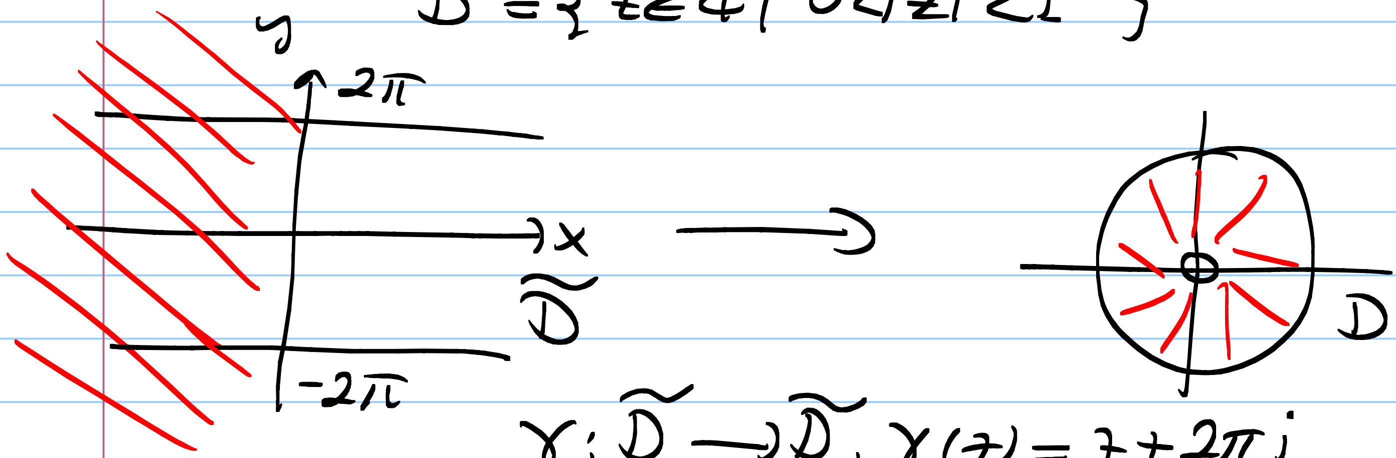
$\simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \qquad \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

$\pi : \tilde{D} \to D$ evrensel örtüsü için iki model:

<u>Model 1)</u> $\tilde{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ x < 0 \}$

$\downarrow$

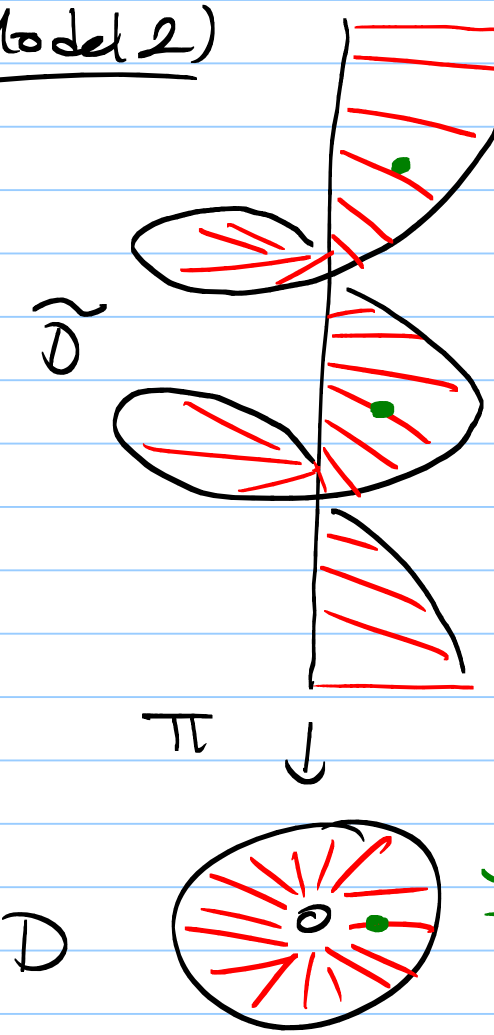
$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1 \}$



$\gamma : \tilde{D} \to \tilde{D},\ \gamma(z) = z + 2\pi i$

$$D = \tilde{D} / \langle \gamma \rangle = \tilde{D} / \mathbb{Z}$$

Model 2)



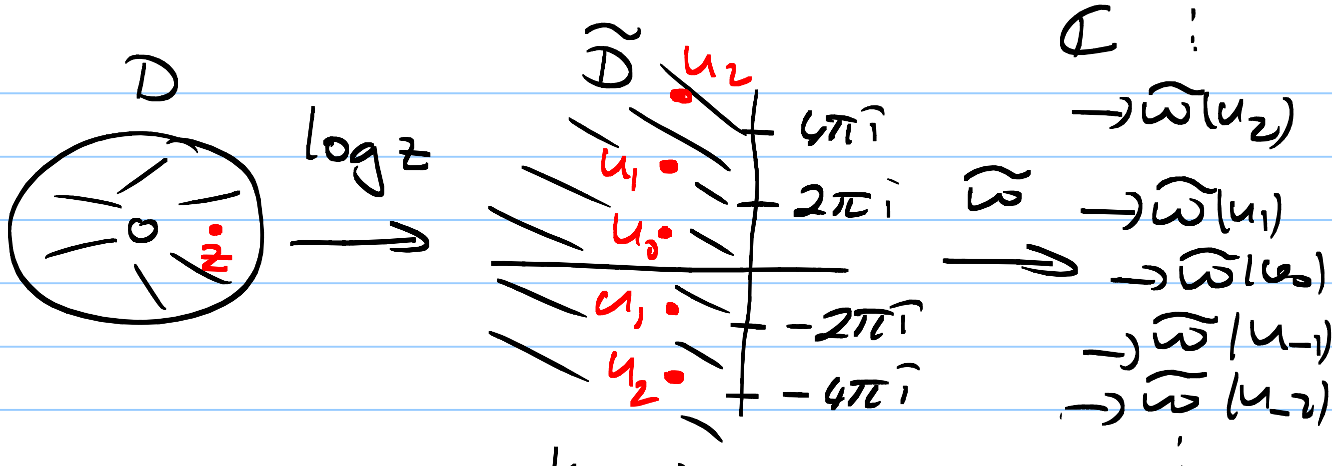
$$\tilde{\tilde{z}} = r e^{i(\theta+(2n+2)\pi)} = \gamma(\tilde{z})$$

$$\tilde{z} = r e^{i(\theta+2n\pi)}$$

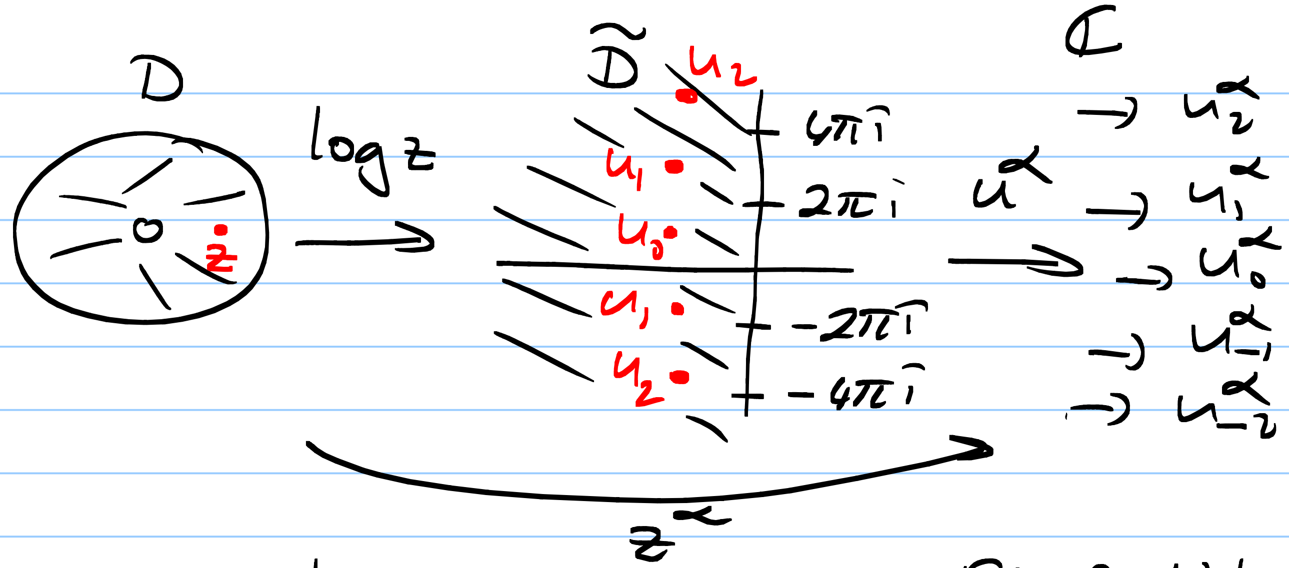
$$\gamma(\tilde{z}) = \tilde{\tilde{z}}$$

$$D = \tilde{D} / \langle\gamma\rangle$$

$$z = r e^{i\theta}$$



$$\tilde{\omega}(u_k) = \tilde{\omega}((\gamma^*)^k u_0)$$
$$= c^k \tilde{\omega}(u_0)$$



$$z^\alpha = \{ e^{\alpha \log z} \} = \{ e^{\alpha \ln r} \cdot e^{\alpha(i\theta + 2\pi k)} \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$(z = r e^{i\theta})$ $\qquad = e^{2\pi i \alpha k} u_0^\alpha = c^k u_0^\alpha$

$(c = e^{2\pi i \alpha})$ $\qquad u_k^\alpha = (\gamma^*)^k u_0^\alpha = c^k u_0^\alpha$