Note Title 11.06.2020

Georg Cantor (1845–1918)

$H = \{\text{Pazartesi}, \text{Salı}, \dots, \text{Pazar}\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

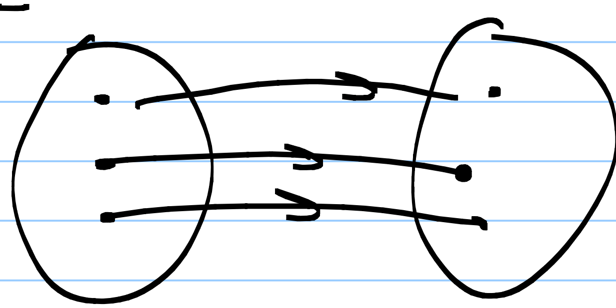
$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{R}$ = Gerçel sayılar kümesi

$A \subseteq B \iff$ Her $a \in A \Rightarrow a \in B$.

Tanım: A kümesi kendisinden farklı bir $B \subseteq A$ kümesi ile birebir eşlenebiliyorsa o kümeye sonsuz küme denir.

Birebir Eşleme: $A \xrightarrow{f} B$



$|A| = |B|$ eğer A ile B arasında 1-1 eşleme varsa.

$A \subset B$, $A \neq B$, $|A| = |B| \Rightarrow B$ sonsuz.

Örnek: $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $\{2, 3, 4, \dots\} = A$

$|A| = |B| \Rightarrow B$ sonsuz.

Russell Paradoksu:

$X =$ Bütün kümelerin kümesi

$R \subseteq X, \quad R = \{A \in X \mid A \notin A\}$

$$\left.\begin{array}{l} R \in R \Rightarrow R \notin R \\ R \notin R \Rightarrow R \in R \end{array}\right\} \Rightarrow R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Çelişki.

Zermelo–Fraenkel Teorisi.

Sayılabilir Kümeler:

A sayılabilir bir kümedir eğer A ile $\mathbb{N}$ arasında 1-1 eşleme bulunuyorsa.

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} \\ \quad\;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \\ A = \{a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\} \end{array}$$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\quad = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ sayılabilir bir kümedir.

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Q},\ q \neq 0\}$

$$\mathbb{Q}^+ \quad \begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \cdots \\ \frac{2}{1} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ 1/1,\ 1/2,\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \dots \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \{ 0, -1/1, 1/1, -1/2, 1/2, -1/3, 1/3, \dots \}$$

$\mathbb{R}$ sayılabilir mi?

$[0,1]$ $\quad$ Cevap: $\mathbb{R}$ sayılamaz.

Kanıt: Diyelim ki $[0,1]$ sayılabilir olsun.

$$[0,1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1 \}$$
$$= \{ a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \}$$

$a_1 = 0.\underline{2}57098\dots$

$a_2 = 0.0\underline{3}5864\dots$

$a_3 = 0.47\underline{0}098\dots$

$b = 0.347\dots\dots \in [0,1]$ $\quad$ $b \neq a_1,\ b \neq a_2,\ b \neq a_3$

$b \neq a_n$ her n için.

$b \notin [0,1] \Longrightarrow$ Çelişki.

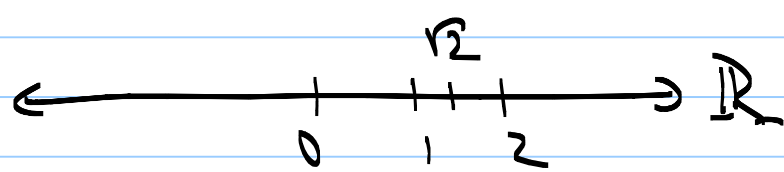
$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

Kardinalitesi $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ arasında olan bir küme var mı?

Kurt Gödel: (1906–1978)

1940: Böyle bir kümenin, varsa bile, var olduğu kanıtlanamaz.

1963: **Paul Cohen**: Böyle bir küme yoksa bile yokluğu kanıtlanamaz.



$\mathbb{Q}$ sayılabilir **$\mathbb{R}$ sayılamaz**

Tüm isimlerin kümesi sayılabilirdir.

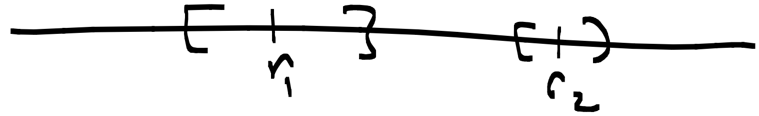
Ölçüm Teorisi: $A \subseteq \mathbb{R}$

$A = [0,2]$ $\mu(A) = 2$

$B = [-1,3] \cup (4,5)$, $\mu(B) = 4+1 = 5$.

$\mu(\mathbb{Q}) = ?$

$\mathbb{Q} = \{ \underline{r_1}, \underline{r_2}, \underline{\underline{r_3}}, \underline{\underline{r_4}}, \dots \}$



$r_1 \in [r_1 - \frac{1}{4}, r_1 + \frac{1}{4}] \longrightarrow 1/2$

$r_2 \in [r_2 - \frac{1}{8}, r_2 + \frac{1}{8}) \longrightarrow 1/4$

$\vdots$

$r_n \in [r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}] \to 1/2^{n-1}$

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}\right]$$

$0 \leq \mu(\mathbb{Q}) \leq 1/2^n$ her n için.

$\Rightarrow \mu(\mathbb{Q}) = 0.$

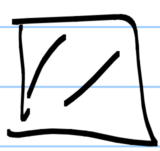
$|\mathbb{Q}| = a < \qquad b = |\mathbb{R}|$

Sonuç: X, $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$

$|X| < |\mathcal{P}(X)|$

$|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}^2(\mathbb{R})| < \dots$

Sonuç: $|[0,1] \times [0,1]| = |[0,1]|$



$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$(x, y) \longleftrightarrow z$

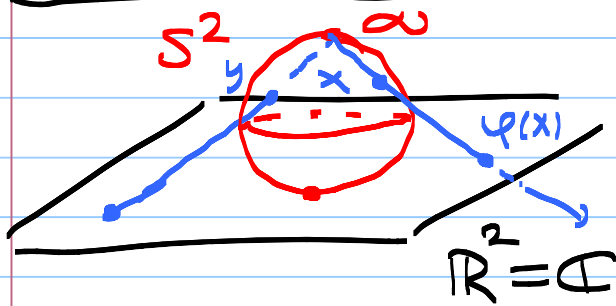
$x = 0.a_1 a_2 a_3 \dots \qquad z = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$

$y = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$

$|[0,1]\times[0,1]\times[0,1]| = |[0,1]|$

Geometride Sonsuzluk:

Riemann Küresi



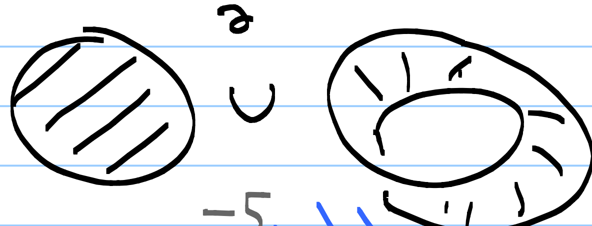
$S^2 \setminus \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{C}=\mathbb{R}^2$

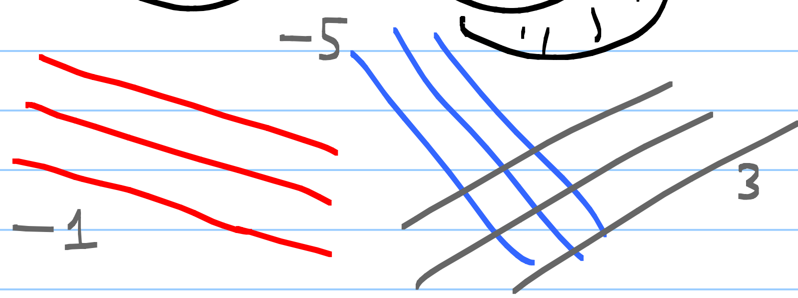
$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = S^2$

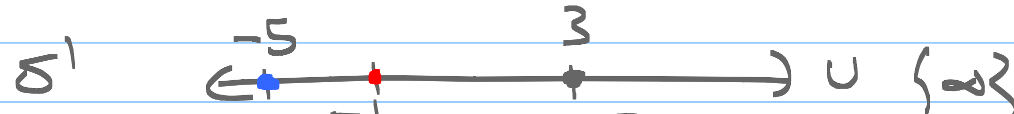
Projektif Düzlemi

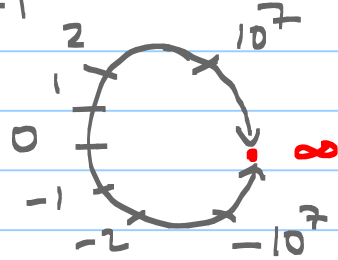
$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup S^1$ ⇐ sonsuzdaki doğru.

$\mathbb{RP}^2 = D^2 \cup_\partial MB$









BBC Belgeseli:

Dangerous Knowledge

1) Ahmet Çevik: "Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık"
(Nesin Matematik Köyü)

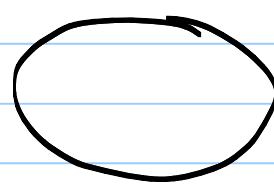
2) Timur Karaçay "Soyut Matematik"

TÜBA AÇIK DERS

3) Halil İbrahim Karakaş
"Matematiğin Temelleri"
O.D.T.Ü. G.V. Yayınları

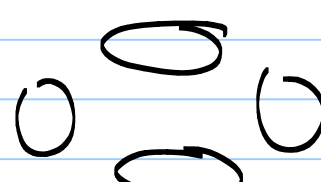
arxiv.org

2. $x^2+y^2=1$



3. $y^2=x^3+3x+1$

4. $f(x,y)=0$, $\deg(f)=4$



veya