Note Title 29.02.2020

Georg Cantor'un Küme Teorisi

- Elemanları tanımlanabilen topluluklara küme denir.

$H = \{$Pazartesi, Salı, ..., Pazar$\}$ haftanın günleri kümesi

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tam sayılar kümesi

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{R}$ = Gerçel sayılar kümesi.

- Alt küme $A \subseteq B \Longleftrightarrow$

$\forall a \in A \Rightarrow a \in B$.

- Bire-bir eşleme

- Sonlu küme / Sonsuz küme

- Russell'ın Paradoksu

Cantor'un küme teorisinin eksik olduğunu göstermiştir: Elemanları tanımlanabilen nesneler topluluğunun illa ki bir küme olması gerekmediğini göstermiştir.

Russell'ın örneği: Bütün kümelerin kümesi diye bir küme yoktur.

Kanıt: Diyelim ki X bütün kümelerin kümesi olsun. R ise X'in $R = \{A \in X \mid A \notin A\}$ ile tanımlanan alt kümesi olsun.

O halde, $R \in R \Rightarrow R \notin R$, ve $R \notin R \Rightarrow R \in R$ elde edilir.

Başka bir deyişle,

$R \in R \Longleftrightarrow R \notin R$, ki bu bir çelişkidir. O halde, her tanımlanabilen topluluk bir küme değildir.

Russell'dan sonra bu teoriye Naif Kümeler Teorisi dendi, ve küme teorisi daha karmaşık bir hal aldı.

- Sayılabilir kümeler

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, tüm isimler

- Sayılamaz kümeler: $\mathbb{R}$

Dolayısıyla, gerçel sayıların çoğunun ismi yoktur.

- Sayılabilir kümelerin ölçüsü sıfırdır.

• $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.

<u>Kanıt:</u> $X \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$, $x \longmapsto \{x\}$, $\forall x \in X$.

Dolayısıyla, $|\mathcal{P}(X)| \geq |X|$.

Diyelim ki, $|\mathcal{P}(X)| = |X|$

$$X \longleftrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$x \longleftrightarrow A(x)$$

$T \subseteq X$ şu şekilde tanımlanan alt küme olsun:

$T = \{x \in X \mid x \notin A(x)\}$

$T \in \mathcal{P}(X)$ olduğu açıktır. $x_0 \in X$, $A(x_0) = T$ olacak şekilde seçilsin.

Şimdi, $x_0 \in T$ ise $x_0 \notin A(x_0) = T$ olur. Benzer şekilde, $x_0 \notin T = A(x_0)$ ise $x_0 \in T$ olur. Dolayısıyla, yine $x_0 \in T \Longleftrightarrow x_0 \notin T$ çelişkini elde etmiş olduk. Bu kanıtı bitirir. ■

• $|\mathbb{R}| = |[0,1]| = 2^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

<u>Kanıt:</u> $\varphi : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

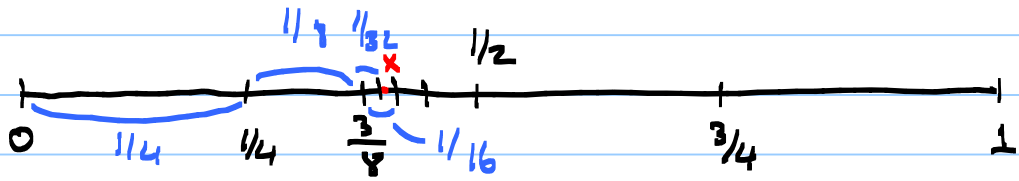
$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ ise $\varphi(A)$ sayısı

$$\varphi(A) = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots$$

<u>Örnek:</u> $A = \{1, 3, 8, 125, \dots\}$

$$\varphi(A) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{125}} + \cdots .$$

Bu fonksiyonun örten olduğunu görmek için her $x \in [0,1]$ gerçel sayısının iki tabanına göre açılımı olduğunu gözlemleyiniz:



$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

$$\varphi(\{2, 3, 5, \dots\}) = x$$

φ fonksiyonu bire bir olmasa da en fazla ikiye bir dir:

$$\varphi(\{3,4,5,6,\dots\}) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2^2} = \varphi(\{2\}).$$

Bu kanıtı bitirir.

Soru $\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$ arasında bir küme var mı?

- Kurt Gödel 1940 yılında böyle bir küme varsa bile varlığının kanıtlanamayacağını gösterdi.
- 1963 yılında ise Paul Cohen böyle bir küme yoksa bile bunun kanıtlanamayacağını gösterdi.
- Gödel'in eksiklik teoremi: İçinde bir aritmetik olan her matematiksel sistem kanıtlanamay-

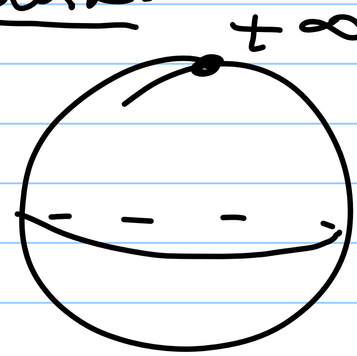
cak teoremler içerir.

Dahası bu tür her sistem cevabı olmayan sorular içerir.

- (Continuum Hipotezi) Süreklilik Hipotezi: Kardinalitesi $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ arasında olan bir küme yoktur.
- Gödel'in işlerinin bilimsel, politik ve inanç sistemleri üzerine etkileri.
- Georg Cantor akıl hastanesinde öldü.
- Kurt Gödel yemek yemeği reddettiği için açlıktan öldü. Öldüğünde 30 kg'ın altındaydı.
- Bir eşcinselin bir devamı sayılan Alan Turing kendini öldürdü.

Geometride Sonsuzluk:

Küresel Geometri:



Projektif Geometri:

Düzlem ∪ sonsuzdaki doğru.